International Labour Office

International Social Security Association

Matemática Atuarial de Sistemas de Previdência Social

Tradução: Paulo Estevão Tavares Cavalcante

Subramaniam Iyer

Coleção Previdência Social

Volume 16

PREVIDÊNCIA SOCIAL

MINISTÉRIO DA PREVIDÊNCIA E ASSISTÊNCIA SOCIAL

SECRETARIA DE PREVIDÊNCIA SOCIAL

A edição original desta obra foi publicada pela Repartição Internacional do Trabalho, Genebra, sob o título *Actuarial Mathematics of Social Security Pensions.*
Traduzido e reproduzido com autorização.

Presidente da República: Fernando Henrique Cardoso
Ministro da Previdência e Assistência Social: José Cechin
Secretário Executivo: Johaness Eck
Secretário de Previdência Social: Vinícius Carvalho Pinheiro
Diretor do Depto. do Regime Geral de Previdência Social: Geraldo Almir Arruda
Diretor do Depto. dos Reg. de Prev. no Serviço Público: Delúbio Gomes Pereira da Silva
Tradução: Coordenação-Geral de Atuária, Contabilidade e Estudos Técnicos
Coordenador-Geral de Atuária, Contabilidade e Estudos Técnicos: Marcelo Abi-Ramia Caetano

Edição e Distribuição:
Ministério da Previdência e Assistência Social
Secretaria de Previdência Social
Esplanada dos Ministérios, Bloco F
70.059-900 – Brasília – DF
Tel.: (61) 317-5014 Fax: (61) 317-5195
Tiragem: 6.000 exemplares
Impresso no Brasil/Printed in Brazil
Exemplus Comunicação & Marketing Ltda.

Iyer, Subramaniam.
Matemática Atuarial de Sistemas de Previdência Social / Subramaniam Iyer, tradução do Ministério da Previdência e Assistência Social. - Brasília: MPAS, 2002.
182p. - (Coleção Previdência Social, Série Traduções; v. 16)

ISBN - 85.88219-15-8

1. Avaliação atuarial 2. Seguridade Social 3. Financiamento da seguridade social 4. Métodos estatísticos I. Título II. Série

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

No Brasil, até pouco tempo, os sistemas de previdência – seja o Regime Geral de Previdência Social ou os regimes dos servidores públicos federais, estaduais e municipais – não traziam em sua lógica de funcionamento elementos atuariais consistentes ou, na melhor das hipóteses, não eram analisados sob uma ótica atuarial. Com a Lei de Responsabilidade Fiscal, instituída em 4 de maio de 2000, o Governo Federal passou a, obrigatoriamente, enviar ao Congresso Nacional avaliações atuariais para os distintos regimes de Previdência. Pouco tempo antes, em 1999, critérios atuariais foram introduzidos no cálculo do valor dos benefícios do Regime Geral – por meio do chamado *fator previdenciário*, instituído pela Lei n.º 9.876/99.

O contínuo interesse e preocupação em relacionar aspectos atuariais à lógica de funcionamento dos sistemas de previdência é devido, em grande parte, ao maior acesso a estudos e divulgação de debates sobre o tema. Neste sentido, este volume da *Coleção Previdência Social* – tradução do livro *Actuarial Mathematics of Social Security Pensions* – que trata de aplicações de princípios e técnicas atuariais a sistemas públicos de previdência, vem contribuir para ampliar a literatura disponível sobre o tema.

Em sua primeira parte, o livro traz toda a teoria que ajuda a esclarecer o impacto do financiamento de diferentes tipos de regimes. Na segunda parte, discute as técnicas de projeção para avaliações atuariais e o método do valor presente.

Trata-se de um trabalho inédito, até mesmo em seu idioma original, que vem, segundo a Associação Internacional de Seguridade Social e a Organização Internacional do Trabalho, "preencher uma lacuna na literatura atuarial". Deverá servir de referência não apenas para aqueles que atuam em instituições previdenciárias, mas para atuários de um modo geral.

A tradução e a publicação deste livro é mais uma iniciativa do Ministério da Previdência e Assistência Social em oferecer material teórico para aprofundamento em estudos de interesse de todo o sistema previdenciário do Brasil.

Brasília, maio de 2002

JOSÉ CECHIN
Ministro de Estado da Previdência e Assistência Social

PREÂMBULO

Este livro preenche uma lacuna existente na literatura atuarial. Trata de aplicações de princípios e técnicas atuariais a sistemas de previdência social públicos.

Geralmente esses sistemas possuem escopo nacional, são obrigatórios e financiados com contribuições relacionadas aos rendimentos dos participantes. Sistemas públicos de benefícios definidos são geralmente financiados pelo método de repartição simples. Outros, especialmente sistemas de países em desenvolvimento, adotam vários níveis de capitalização antecipada para financiar os benefícios.

Métodos apropriados para o financiamento de sistemas públicos de benefícios definidos são largamente debatidos. Este volume contribui para a discussão por ressaltar aspectos em que o financiamento dos sistemas de previdência social diferem dos métodos de capitalização dos sistemas de previdência ocupacionais.

Este livro constitui uma referência para atuários de sistemas de previdência social. O objetivo deste trabalho é servir como livro-texto para pessoas engajadas em tarefas atuariais de instituições de previdência social, no entanto, ele pode ser de interesse para outros atuários.

Subramaniam Iyer foi encarregado de escrever este volume pela Associação Internacional de Seguridade Social. Membro honorário do Instituto de Atuária e da Associação Suíça de atuários, ele possui uma carreira brilhante no Departamento de Seguridade Social da Organização Internacional do Trabalho, onde se aposentou como Chefe da Área Financeira, Atuarial e Estatística. Durante sua carreira, adquiriu extensa experiência em avaliações financeiras e atuariais de sistemas de seguridade social, particularmente naqueles situados em países em desenvolvimento e de economias em transição.

Este livro integra uma série de publicações envolvendo aspectos financeiros, atuariais e estatísticos que está sendo preparada conjuntamente pela Associação Internacional de Seguridade Social e o Departamento de Seguridade Social da Organização Internacional do Trabalho.

Colin Gillion, Diretor
Departamento de Seguridade
Organização Internacional do Trabalho
Gênova, Suíça

Dalmer D. Hoskins, Secretário Geral
Associação Internacional de Seguridade Social
Gênova, Suíça

PREFÁCIO

Foi um privilégio para mim ter sido convidado pela Associação Internacional de Seguridade Social (ISSA) para escrever este livro.

O livro, eu acredito, fornecerá um complemento útil aos textos atuariais sobre aposentadorias disponíveis em língua inglesa. Atualmente não existe carência de livros-texto em matemática atuarial para sistemas de previdência ocupacional, no entanto, não parece existir qualquer título comparável em previdência social.

Onde os sistemas de previdência social são financiados através de repartição simples, talvez exista um menor escopo para uma abordagem teórica sofisticada desse assunto. Entretanto, é um fato histórico que, nos últimos tempos, benefícios de seguro social foram financiados de acordo com uma extensão do princípio da capitalização total dos sistemas de previdência ocupacional. Embora o interesse em capitalização tenha diminuído com o tempo, o debate entre os proponentes da repartição simples e da capitalização não acabou, tendo recentemente ressurgido o interesse em capitalização. No presente momento, vários níveis de capitalização da seguridade social estão sendo praticados por diferentes países, incluindo a capitalização total de sistemas de contribuição definida de previdência social.

A Organização Internacional do Trabalho (OIT) tem, por várias décadas, prestado serviços atuariais para muitos governos nacionais visando à introdução ou revisão dos programas de seguridade social. No curso desses trabalhos, efetuados em países em desenvolvimento e economias em transição do Centro e do Leste Europeu, a OIT desenvolveu novas abordagens e técnicas. A ISSA, por sua vez, forneceu um valioso fórum para discussão de metodologias tradicionais e inovadoras nas séries de Conferências de Seguridade Social, Atuária e Estatística. Este livro utiliza-se desse rico material atuarial.

O livro também objetiva estabelecer uma ligação entre os métodos de financiamento da previdência social e os métodos de capitalização de sistemas de previdência ocupacional. São ressaltadas as diferenças que existem entre os dois conjuntos de métodos a despeito das inerentes similaridades. Esperamos, portanto, que este livro seja útil não somente para atuários envolvidos com previdência social, mas também para aqueles especializados em previdência ocupacional que desejam obter um entendimento do outro campo. Não pretendemos, no entanto, que este seja um livro-texto em previdência ocupacional, que aqui é tratada somente em linhas gerais.

A introdução fornece uma breve descrição do conteúdo deste livro. O material é dividido em duas partes. A parte I, que trata da teoria, contém quatro capítulos. O capítulo 1 introduz a teoria básica do financiamento de sistemas de previdência social. Na seqüência, o capítulo 2 estabelece a ligação com a capitalização de sistemas de previdência ocupacional. No capítulo 3 são discutidos tópicos avançados relacionados ao financiamento de sistemas de previdência social. O capítulo 4 é devotado aos sistemas de contribuição definida. O tratamento em toda a parte I é baseado em funções contínuas, que ajudam a enfatizar princípios e inter-relações, e a elucidar o impacto de diferentes abordagens de capitalização. A parte II discute as técnicas atuariais e é dividida em dois capítulos. O capítulo 5 apresenta a técnica de projeção, que é apropriada para a análise atuarial de sistemas de previdência social. Contudo, com a finalidade de oferecer um panorama mais geral, incluímos também a técnica mais tradicional do valor presente no capítulo 6. Para fins de coerência com a natureza prática do conteúdo da parte II, o tratamento é inteiramente em termos de funções discretas.

Seis apêndices completam o livro. O apêndice 1 contém um breve sumário da matemática atuarial básica que funciona como uma fonte de consulta rápida para os leitores. O apêndice 2 ilustra os métodos discutidos nos capítulos 1 e 2 fazendo referência a um sistema de aposentadorias simples e hipotético. O apêndice 3 é um glossário dos principais métodos de financiamento e capitalização, enquanto o apêndice 4 lista os vários símbolos utilizados no livro. Nos apêndices 5 e 6 são apresentados desenvolvimentos matemáticos adicionas de certos resultados estabelecidos no texto. Finalmente, uma bibliografia cita os documentos científicos e livros-texto que foram consultados durante a preparação do livro.

Este não é um manual, mas um livro-texto básico. O leitor encontrará nele os princípios que fundamentam a teoria matemática e as técnicas de avaliação de sistemas de previdência social, apresentadas através de modelos relativamente simplificados. O atuário prático necessitará contudo, adequar este material às condições e circunstâncias, e desenvolver ou adquirir o software de computador necessário para propósitos de aplicação prática.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer aos atuários da OIT e da ISSA, passados e presentes, que, partindo dos trabalhos seminais de Anton Zalenka e Peter Thullen, têm produzido material original suficiente para um livro-texto como este. Sou particularmente devedor do Dr. Thullen, autor do manual de técnicas atuarias de seguridade social de 1973, que tem sido uma fonte valiosa. Gostaria de remeter ao leitor este manual (em francês) para obter maiores detalhes sobre aspectos mais avançados do financiamento da previdência social.

Gostaria ainda de expressar minha gratidão a Warren McGillivray pelo interesse que demonstrou por este projeto e por seu encorajamento e apoio durante a preparação do livro, não sendo exagero afirmar que sem esse apoio, o livro provavelmente não veria a luz do dia.

Não poderia contar com mais distinto conjunto de revisores que Chris Daykin, Jean-Paul Picard e Michael Cichon. Sem a revisão deles, o livro não seria o que é, embora, é claro, qualquer imperfeição porventura ainda existente deva ser creditada à minha pessoa. Meus agradecimentos são também devidos a Alvaro Castro-Gutierrez, Anne Drouin, Kenichi Hirose, Denis Lutulippe, Pierre Plamondon, Hiroshi Yamabana e Andrew Young por suas úteis sugestões.

Não obstante minha ocasional negligência nas obrigações domésticas, minha esposa e filhos alegremente forneceram-me suporte moral e material durante os dois anos em que estive engajado neste projeto. Harish Iyer forneceu consultoria técnica para o processamento deste livro no computador e desenhou os gráficos do apêndice 2. Agradeço finalmente à minha família pela ajuda e compreensão.

Subramaniam Iyer

INTRODUÇÃO

Este livro é sobre *sistemas de previdência social*. Esses sistemas são arranjos institucionais para a proteção de idosos, inválidos e dependentes que perderam sua fonte de sustento em razão do falecimento de seus provedores. São organizados a nível nacional através de iniciativa governamental e previstos em lei. Essas leis cobrem, em particular, os direitos e obrigações de todos os indivíduos e estabelecimentos afetados pelo sistema, incluindo as contribuições devidas e os benefícios previstos. Os sistemas de previdência social são geralmente obrigatórios para categorias específicas da população (por exemplo: para todas as pessoas empregadas, para todas as pessoas economicamente ativas, para todos os residentes). Esses sistemas são administrados diretamente por uma agência ou departamento do governo ou ainda por uma organização paraestatal sujeita à supervisão governamental. A solvência e capacidade de pagar os benefícios futuros é na maioria dos casos implícita ou explicitamente garantida pelo governo.

Sistemas de previdência social estatais são complementados por *sistemas privados de aposentadoria* que devem fornecer benefícios "acima do teto" ou podem ser aceitos como alternativa para o sistema nacional, se isso for permitido. Sistemas privados geralmente tomam a forma de *sistemas de previdência ocupacional*, que são de responsabilidade de empregadores individuais ou de grupos de empregadores e podem ser organizados como fundos mútuos ou abertos. Além desses, existem arranjos voluntários, tais como *aposentadorias pessoais* e *anuidades* reguladas por lei e emitidas por companhias de seguros.

Tanto os sistemas de previdência social como os de previdência ocupacional podem tomar qualquer das seguintes formas: *benefícios definidos* ou *contribuições definidas*. A diferença essencial entre essas duas formas é que no primeiro caso a fórmula de benefício é especificada e os arranjos financeiros – incluindo, em particular, as contribuições devidas – são determinadas de forma suficiente para financiar os benefícios; no segundo caso, as contribuições a serem pagas são especificadas, e os benefícios são resultantes do investimento dessas contribuições.

Este livro está focado principalmente em sistemas de previdência social do tipo benefícios definidos, mas são também feitas considerações para os sistemas do tipo contribuições definidas. Assumimos que o leitor esteja familiarizado com a estrutura geral de tais sistemas. Uma descrição sumária do desenho desses sistemas é, entretanto, fornecida abaixo, juntamente com as variações advindas da prática; mais detalhes devem ser procurados em outras fontes (por exemplo, ILO, 1984). Este livro refere-se a benefícios de aposentadoria de sistemas de previdência ocupacional apenas para fins de comparação, não discutindo, portanto, outros benefícios oferecidos por sistemas privados.

Dessa forma, não é descrita a estrutura desses sistemas, porém, o leitor interessado pode encontrar publicações especializadas (por exemplo, Lee, 1986).

SISTEMAS DE PREVIDÊNCIA SOCIAL COM BENEFÍCIOS DEFINIDOS

Fontes de financiamento

As fontes de financiamento dos sistemas de previdência social podem incluir uma ou mais das seguintes fontes: *contribuições* pagas por indivíduos cobertos pelo sistema; contribuições pagas pelos empregadores em favor dos empregados cobertos; subsídios e outras receitas governamentais.

As contribuições podem ser de *valor uniforme* ou *relacionadas à renda*. No contexto das contribuições relacionadas à renda, o termo "renda" pode referir-se não à renda total, mas apenas àquela parcela até um determinado teto, acima de um específico piso ou entre dois níveis de renda. As alíquotas de contribuição podem ser uniformes ou variar de acordo com o nível de renda (sistema de classes de salários).

Condições de qualificação para aposentadorias

As contingências ou riscos cobertos pelos sistemas de previdência social de benefícios definidos incluem *aposentadoria,* ao alcançar o indivíduo uma idade particular; inabilidade para continuar trabalhando por *invalidez*, e *morte,* quando em atividade ou em gozo de benefício por invalidez.

As a*posentadorias por idade ou tempo de contribuição* são normalmente sujeitas ao afastamento do indivíduo da atividade laboral, ao atendimento a um determinado limite de idade e à satisfação de um determinado período mínimo de qualificação. Uma idade mais baixa de aposentadoria pode ser aplicada para as mulheres, ou para uma classe particular de membros do sistema. Aposentadorias integrais com idades mais baixas podem ser permitidas em certos casos, por exemplo, para pessoas engajadas em trabalhos árduos ou insalubres ou para aquelas atividades em que as pessoas são prematuramente consideradas envelhecidas para o exercício da função. Aposentadorias prematuras com valores de benefícios não integrais podem ser permitidas, sujeitas à satisfação de condições de trabalho específicas.

O período exigido para qualificação normalmente refere-se ao tempo de contribuição normal, mas, dependendo do sistema, podem referir-se ao período de cobertura, emprego ou residência (para efeito de padronização utilizaremos abaixo o termo *período de cobertura*). Períodos de afastamento do trabalho devido a doenças, maternidade, acidentes de trabalho ou períodos de tempo despendidos em cuidados de crianças ou inválidos, podem ser considerados como períodos de cobertura. Quando um novo sistema é introduzido, recursos para transição podem ser necessários para fazer face aos períodos menores exigidos para qualificação dos entrantes iniciais acima de uma determinada idade. Algumas vezes uma condição de densidade de contribuições, que é o crédito de um período de trabalho mínimo por ano de cobertura, pode também ser requerida.

Aposentadorias por invalidez são, em primeira instância, sujeitas à condição da existência de um grau mínimo específico de invalidez de acordo com a definição adotada, que pode ser baseada em um dos três conceitos: *física*, *ocupacional* ou *geral*. Invalidez física refere-se a perda de uma parte do corpo ou de uma faculdade física ou mental; invalidez ocupacional refere-se à perda da capacidade de obter rendimentos com a ocupação anterior; invalidez geral refere-se à perda da capacidade de desenvolver qualquer atividade remunerada. O grau mínimo de qualificação para a invalidez varia de um meio a dois terços. Em adição, o período de qualificação – consideravelmente menor que aquele requerido para obtenção de uma aposentadoria normal – ou uma condição de densidade de contribuição é geralmente imposta.

Pensões são concedidas (principalmente viúvas/viúvos), sujeitas à condição de que o segurado que veio a falecer esteja qualificado para o recebimento de benefício por invalidez ou já esteja aposentado por tempo de contribuição, idade ou invalidez. Algumas condições devem ser requeridas da viúva, tais como ter alcançado uma idade mínima específica, estar inválida ou possuir crianças sob os seus cuidados. As pensões de viúvas normalmente cessam se estas vêm a contrair novas núpcias, algumas vezes com o pagamento de um pecúlio. As pensões concedidas aos órfãos normalmente são descontinuadas a partir de uma determinada idade, mas podem ser estendidas em certas circunstâncias, por exemplo, se a criança é estudante em tempo integral ou inválida.

Quando o período de cobertura não é suficiente para a obtenção de uma aposentadoria por idade, tempo de contribuição ou invalidez, ou ainda para o recebimento de uma pensão, então um pecúlio pode ser concedido.

A fórmula de aposentadoria

A fórmula de aposentadoria pode ser um *valor uniforme* ou um *valor relacionado ao rendimento*. (Na seqüência, a palavra salário será usada como sinônimo de rendimento.) Uma fórmula de valor uniforme fornece aposentadorias de montante uniforme, independentemente do nível de rendimento individual, enquanto que uma fórmula relacionada aos rendimentos liga a aposentadoria ao salário prévio do indivíduo. Rendimentos referem-se ao salário segurado, que pode ser diferente do salário atual devido à aplicação de um piso e/ou teto.

No caso em que os benefícios são relacionados aos rendimentos, a base de cálculo pode ser o *salário final segurado*, *a média final dos salários segurados* ou a *média dos salários segurados da carreira do indivíduo*. A média final é tipicamente computada utilizando-se os salários dos últimos anos (geralmente os últimos cinco anos) da carreira do indivíduo. No cálculo da média deve-se levar em consideração a correção dos salários utilizados de forma a compensar o aumento no nível geral de salários ocorrido até o momento da concessão do benefício.

A *taxa de reposição*, isto é, o montante do benefício como um percentual do salário utilizado como base de cálculo, que em um sistema relacionado aos rendimentos, tipicamente consistirá da soma de um percentual fixo independente do período segurado e um percentual ligado ao período segurado. Um percentual máximo é geralmente prescrito para a taxa de reposição. A mesma fórmula de benefício é geralmente aplicada para aposentadorias por idade e tempo de contribuição, aposentadorias por invalidez e pensões de sobreviventes. Benefícios máximos e mínimos podem ser fixados em termos absolutos (isto é, em unidades monetárias).

No caso de entrantes que estão acima de uma idade específica quando o sistema se inicia, créditos especiais de períodos de cobertura, crescentes por idade, podem ser concedidos para compensar a impossibilidade destes de completar o período total de cobertura necessário. Para aposentadorias por invalidez, créditos especiais, decrescentes por idade, podem ser concedidos para compensar a perda de potenciais períodos futuros de cobertura; por extensão, esses créditos podem também aplicar-se a pensões de sobreviventes originadas da morte de segurados ativos.

As pensões calculadas de acordo com a fórmula de aposentadoria são usualmente alocadas a sobreviventes individuais de acordo com percentagens previstas, estando essas parcelas sujeitas à soma limite de 100 por cento da pensão total.

Indexação de aposentadorias

A legislação pode prever um ajustamento *sistemático* ou *automático* das aposentadorias, isto é, ela pode determinar o procedimento e o método de ajustamento; ou apenas um *ajustamento em princípio*, caso em que uma revisão regular pode ser prevista sem contudo especificar como deverá ocorrer o ajustamento. Nos casos em que a legislação não prevê qualquer tipo de indexação, ajustamentos *ad hoc* podem ser realizados esporadicamente pela autoridade competente. O mecanismo de indexação pode ser baseado no índice de custo de vida, no índice de crescimento dos rendimentos ou em alguma composição desses dois índices. Podem ainda ser aplicados limites para a extensão do ajustamento, em termos absolutos ou como uma proporção. A indexação deve também ser aplicada aos parâmetros expressos em unidades monetárias, tais como pisos e tetos, e valores máximos e mínimos de benefícios.

SISTEMAS DE PREVIDÊNCIA SOCIAL COM CONTRIBUIÇÃO DEFINIDA

Um tipo de sistema de previdência social com contribuição definida são os fundos de previdência nacionais. Nesses fundos, contas individuais são abertas em nome de cada membro (e, se aplicável, no dos empregadores), onde as contribuições dos membros são registradas. Usualmente não existem contribuições ou subsídios estatais. Os juros são adicionados à conta periodicamente. O saldo acumulado é geralmente pago como um pecúlio na aposentadoria, invalidez ou morte antes da aposentadoria. A morte após a aposentadoria não é uma contingência diretamente coberta. Uma opção para conversão do pecúlio em anuidade é algumas vezes disponível. Saques parciais da conta para outros propósitos podem também ser permitidos, particularmente para aquisição de imóvel residencial, educação de crianças ou despesas de saúde.

A reforma da seguridade social do Chile, em 1981, introduziu um outro tipo de sistema de contribuição definida, que é conhecido como sistema de poupança obrigatória para aposentadoria. Esse sistema, embora obrigatório, é administrado por companhias privadas, que são sujeitas à supervisão governamental. As contribuições são pagas apenas pelos membros. Da mesma forma que nos sistemas de previdência nacionais, contas individuais são mantidas, mas além disso esses sistemas garantem uma taxa mínima de juros. Na aposentadoria de um membro, o saldo acumulado é obrigatoriamente convertido em uma aposentadoria indexada, sujeita a um mínimo específico, que é garantido pelo

Estado. Benefícios de invalidez e pensões são concedidos através de arranjos distintos (para detalhes, ver Gillion e Bonilla, 1992).

Existem também sistemas híbridos, tais como aqueles baseados em “sistemas de pontos”, em que existe um benefício definido que é calculado por uma fórmula que deriva das contribuições pagas. Contribuições monetárias são convertidas em pontos com base no valor do ponto na época em que as contribuições foram feitas. Os benefícios, que dependem do número total de pontos acumulados, são reconvertidos no momento dos pagamentos em unidades monetárias com base no valor do ponto à época.

Um outro híbrido é o sistema nocional de contribuições definidas, em que as contribuições são creditadas às contas individuais mas utilizadas para pagamentos de aposentadorias correntes. O saldo nocional nas contas são acrescidos anualmente de um crédito referente a um fator de crescimento (por exemplo: taxa de crescimento dos salários reais, taxa de crescimento do produto nacional bruto) e no momento da aposentadoria os saldos nocionais são convertidos em benefícios. O sistema não é capitalizado, embora o benefício seja baseado no saldo acumulado de uma conta individual, da mesma forma que em um sistema tradicional de contribuições definidas. Durante o período de acumulação ele se assemelha a um sistema de benefícios definidos com rendimentos ajustados e utilizando a média de salários da carreira (McGillivray, 1997).

PARTE I – TEORIA

1. FINANCIAMENTO DA PREVIDÊNCIA SOCIAL

1.1. Introdução

Quando um sistema previdenciário é modelado, uma das principais questões a ser resolvida é o método de acordo com o qual será financiado. Por método de financiamento entendemos o arranjo que permitirá a existência de um fluxo de recursos para fazer face às despesas (com benefícios e possivelmente com a administração) do sistema, à medida que essas ocorram. Em outras palavras, refere-se ao mecanismo que determina o valor e a periodicidade das contribuições ao sistema. Como veremos mais tarde, existem diferentes métodos através dos quais um dado sistema de previdência pode ser financiado.

Este capítulo inicialmente identifica os parâmetros demográficos e econômicos básicos que afetam, de um lado, as despesas do sistema e, de outro, os salários da população coberta que servem de base para o cálculo das contribuições. São ainda discutidas as tendências desses agregados financeiros no tempo e enunciados os princípios matemáticos básicos de financiamento. Em seguida são feitas considerações especiais derivadas dos sistemas de previdência social e apresentados os principais sistemas de financiamento empregados nessa área. A discussão correspondente com relação aos sistemas de previdência ocupacional é o conteúdo do capítulo 2.

A análise inicial refere-se a um sistema previdenciário novo, muito mais que a um sistema já em funcionamento. Isso permite uma visão completa da evolução financeira do sistema ao longo do tempo. Além disso, para fins didáticos, a discussão é baseada em modelos altamente simplificados da realidade. Assume-se que uma projeção foi feita dos agregados financeiros futuros no início do sistema e que essa veio a confirmar-se na realidade. Sobre essas bases, são discutidos os diferentes métodos de financiamento que podem ser aplicados ao sistema. Essa abordagem realça as implicações financeiras de longo prazo do sistema.

A realidade entretanto é muito mais complexa. Em particular, é altamente improvável que a projeção feita no início do sistema se realize com exatidão. De fato, podemos esperar que os exercícios de projeção sejam repetidos a intervalos regulares e realizados ajustamentos e refinamentos no método de financiamento aplicado. Esses aspectos práticos são tratados na parte II deste livro.

Para nos concentrarmos no essencial, a análise refere-se, em princípio, a um sistema com uma fórmula de cálculo de aposentadorias que é estritamente proporcional ao período de contribuição e ao salário final do participante. Além disso, a atenção será focada em benefícios de aposentadoria. Essas restrições, no entanto, não invalidam uma aplicação mais ampla da teoria aqui desenvolvida. A extensão desses princípios para os benefícios de aposentadoria por invalidez e pensão por morte será considerada no capítulo III.

Os termos "contribuições" e "taxa de contribuição" referem-se ao total de recursos destinados ao sistema por todas as partes contribuintes, incluindo empregador, empregado e possivelmente o ente estatal.

1.2. Os Parâmetros Demográficos e Econômicos Básicos

O curso futuro de um sistema de aposentadorias é determinado, em primeiro lugar, pelas características demográficas e econômicas da população inicial coberta. É influenciado ainda por uma série de fatores demográficos e econômicos que ocorrerão durante toda a existência do sistema. Em geral, esses parâmetros variam com o tempo. Para o presente propósito, entretanto, assumiremos que os mesmos se manterão constantes e positivos ao longo do tempo. Eles incluem em particular:

- a força da taxa de juros: δ
- a força do crescimento dos novos entrantes: ρ
- a força do crescimento dos salários: γ
- a força da indexação das aposentadorias: β
- a força (específica para cada idade) da mortalidade, invalidez e outros decrementos: μ_x^d , μ_x^i , etc.

Em adição, a força da inflação é denotada por θ .

O parâmetro γ refere-se à taxa instantânea de mudança do nível geral de salários. Essa taxa é responsável pela progressão individual dos salários em razão da idade, chamada de escala de salários.

Existem certas relações entre esses fatores. Exceto em circunstâncias especiais (por exemplo, durante grandes transformações econômicas), o crescimento dos salários dado pela escala salarial deve exceder a taxa de inflação, a diferença representando os ganhos de produtividade. A indexação das aposentadorias deve, no mínimo, manter o poder de compra das aposentadorias (indexação de preços), mas é desejável que vá além, mantendo o padrão de vida dos aposentados a um nível semelhante ao dos ativos (indexação de salários). Simbolicamente, portanto, $\gamma \geq \beta \geq \theta$. Além disso, espera-se que no longo prazo, a taxa de juros exceda a soma da taxa de crescimento da população segurada e da taxa crescimento da escala salarial. Essa relação tem particular significado econômico (Aaron, 1966). Assume-se portanto que $\delta > \rho + \gamma$.

Um outro fator que é relevante para os sistemas de previdência social é o fator "densidade de contribuições", que indica a proporção do tempo potencial de contribuição que representa tempo efetivo de contribuição pelos participantes do sistema. Para o presente propósito, assumiremos que esse fator é uniforme e alcança 100%; os efeitos de pressupostos alternativos com relação a esse fator serão discutidos no capítulo 3.

Assume-se, sem perda de generalidade, que o número de novos entrantes no intervalo $(0, dt)$ é dt. Conseqüentemente, o número de novos entrantes no intervalo $(t, t+dt)$ deverá ser $e^{\rho t}dt$. Similarmente, se considerarmos o nível geral de salários no início do sistema igual a uma unidade monetária, o nível de salários no tempo t será $e^{\gamma t}$. A unidade de aposentadoria deve elevar-se a $e^{\beta t}$ em t anos.

1.3. As Funções População Ativa e População Aposentada

Para fins de desenvolvimento teórico, o tempo será considerado uma variável contínua, tendo o ano como unidade. As duas funções-chave que descrevem o desenvolvimento demográfico de um sistema de aposentadorias são:

- a função população ativa $A(t)$; e
- a função população aposentada $R(t)$.

Assumiremos que ambas são funções contínuas e diferenciáveis.

Em termos mais rigorosos, essas funções deveriam ser consideradas estocásticas. As projeções demográficas estabelecidas com base nos parâmetros assumidos de fato representam valores médios ou esperados de $A(t)$ e $R(t)$. Os valores reais são governados pelas respectivas distribuições de probabilidade e são, portanto, incertos. A versão clássica de atuária baseada nos valores esperados – a chamada versão "determinística" – será seguida neste livro, mas a natureza estocástica fundamental das funções deverá ser considerada.

Considere um sistema de aposentadorias que opera sem quaisquer mudanças fundamentais, tais como uma modificação significativa na oferta de benefícios ou no escopo de cobertura, exceto por um fluxo estável de novos entrantes (de acordo com a força de crescimento ρ). Assume-se ainda, como é geralmente o caso, que as pessoas que já alcançaram a idade de aposentadoria no início do sistema não têm direito a esse benefício.

A seguir assumimos uma idade de ingresso fixa para os novos entrantes, digamos b, e fixamos a idade de aposentadoria, digamos r, embora o mesmo raciocínio possa ser aplicado para qualquer outra combinação de idades de entrada e de aposentadoria, para que os resultados abaixo apresentados tenham validade geral.

Um diagrama de Lexis (Bowers et al., 1986, p. 511; Daykin et al., 1994, p. 442) é útil para visualizar os componentes de um sistema de previdência, assim como o processo de sua evolução (ver figura 1). O tempo é mostrado ao longo do eixo horizontal e a idade ao longo do vertical; os pontos (x, y) representam as pessoas em idade y no tempo x. O diagrama refere-se às pessoas que entraram no sistema na idade b (=20) e se aposentaram na idade r (=65), sendo w (=100) o limite de vida. Portanto, cada diagrama, tal como *ABE*, representa a coorte de membros desde sua entrada no sistema, passando pelo período de aposentadoria até seu eventual desaparecimento. Cada linha vertical, tal como *ET*, representa as pessoas vivendo no mesmo período de tempo, na condição de ativo ou inativo. Certas zonas no diagrama têm particular importância; o triângulo *ABC*, por exemplo, representa o período de vida futura que será despendido pela população inicial na condição de ativo, enquanto que o paralelogramo *BCDE* apresenta o período de vida futura que será despendido pelo mesmo grupo na condição de pensionista. As áreas finais abertas à direita de *AB* e *BE* representam os períodos de vida dos futuros entrantes.

Assumindo que aqueles com idade superior à idade de aposentadoria no início do sistema não são considerados, o número de aposentados em um sistema novo de aposentadorias inicia em zero e cresce uniformemente por vários anos à medida que seus membros prosseguem obtendo aposentadorias e o número de falecimentos entre os inativos são mais que compensados pelos novos entrantes. Eventualmente, quando a população inicial desaparece inteiramente, a taxa de crescimento se reduzirá e se estabilizará. Este resultado pode ser demonstrado na seqüência para aqueles que entraram na idade fixa b. No diagrama de Lexis (figura 1), se *FJ*= σ anos, o número de aposentados em S deverá ser $e^{\rho\sigma}$ vezes o número em R (sob o pressuposto da constância das taxas de decremento no tempo), e este será também o caso para quaisquer pares de pontos R' e S' localizados nas mesmas linhas verticais. Portanto, quando a população aposentada consiste apenas de sobreviventes dos novos entrantes, deverá esta crescer à taxa instantânea ρ ; o mesmo resultado também pode ser aplicado para a população ativa. Nesse estágio, a força do crescimento da população total segurada deverá tornar-se idêntica à força do crescimento de novos entrantes.

A relação entre o número de aposentados e a população ativa – conhecida como taxa de dependência – apresentará, da mesma forma, tendência ao crescimento; ela crescerá de zero, inicialmente muito rapidamente e posteriormente mais lentamente até alcançar um nível constante. No estágio, digamos $t = w_1$, dizemos que o sistema alcançou a sua maturidade demográfica.

As características das funções $R(t)$ e $A(t)$ podem ser simbolicamente expressas como:

$$R'(t) > 0 \qquad \textbf{(1.1a)}$$

$$\frac{R'(t)}{R(t)} > \frac{A'(t)}{A(t)} \qquad (t < w_1) \qquad \textbf{(1.1b)}$$

$$\frac{R'(t)}{R(t)} = \frac{A'(t)}{A(t)} = \rho \qquad (t \geq w_1) \qquad \textbf{(1.1c)}$$

1.4. As Funções Despesa e Salário Segurado

As duas funções-chave que caracterizam o desenvolvimento financeiro de um sistema de aposentadorias são:

- A função *despesas* $B(t)$; e
- A função *salário segurado* $S(t)$

Inicialmente consideraremos $B(t)$ como função apenas dos gastos com benefícios. Assumimos que ambas as funções são contínuas e diferenciáveis. A despesa total com benefícios e o total da folha de salários segurada no intervalo $(z, z+dz)$ serão então dadas por $B(z)$dz e $S(z)dz$.

Como no caso das funções demográficas $A(t)$ e $R(t)$, as funções $B(t)$ e $S(t)$ são também de natureza estocástica e os valores projetados representam valores esperados destas funções. Para levar em conta a variabilidade dessas funções em torno de suas médias devemos recorrer à teoria do risco, que já é largamente aplicada na área de financiamento de aposentadorias (ver seção 3.12 do capítulo 3). A abordagem deste livro é baseada na versão determinística clássica, mas a natureza estocástica básica das funções deve estar presente.

O termo "taxa de reposição" refere-se ao valor percentual da aposentadoria inicial em relação ao salário que serviu de base para o cálculo do beneficio, por exemplo, o salário do trabalhador segurado no momento da aposentadoria. O "valor da aposentadoria", em qualquer momento subseqüente, refere-se ao valor monetário da aposentadoria, levando-se em conta a indexação desta desde o momento de sua concessão.

Um padrão típico de crescimento de $B(t)$ e $S(t)$ é descrito abaixo. A tendência da função de despesas $B(t)$ será, no primeiro momento, dependente da tendência da população descrita na seção 1.3 acima. Posteriormente será influenciada pelo montante médio das aposentadorias correntes. Nesse sentido, uma importante distinção deve ser feita entre o caso onde a população inicialmente segurada recebe um crédito especial para compensar a entrada tardia no sistema – por exemplo, o reconhecimento do tempo total de serviço passado, e aquele em que tal crédito não é concedido.

No último caso, a taxa de reposição dos novos beneficiários crescerá uniformemente até que as aposentadorias que consideram o tempo total de trabalho para efeito de cálculo do benefício comecem a ocorrer. Conseqüentemente, a taxa média de reposição de todas as aposentadorias correntes também crescerá, embora a taxas decrescentes, até que ela alcance um nível constante, no momento em que todas as aposentadorias correntes pertencerem a indivíduos que se aposentaram somente após transcorrido todo o período de tempo mínimo exigido para a obtenção do benefício. Contrariamente, se períodos trabalhados anteriormente são totalmente reconhecidos, a taxa de reposição será praticamente constante desde o início. Portanto, o volume de créditos referentes ao reconhecimento de períodos trabalhados anteriormente tem profunda influência na tendência de $B(t)$ até o momento em que a população inicial desaparecer completamente.

Em ambos os casos, $B(t)$ crescerá de zero no início, mas a taxa de crescimento será eventualmente reduzida e alcançará um nível constante $(= \rho + \gamma)$, igual à força do crescimento da população aposentada adicionada daquela referente ao crescimento do valor da média das aposentadorias. Utilizando-se o diagrama de Lexis demonstra-se que o valor médio das aposentadorias cresce à força γ (figura 1). Considere os entrantes na idade fixa b; o montante médio das aposentadorias em S deve ser $e^{\gamma\sigma}$ vezes aquele em R, refletindo o crescimento do salário no momento da aposentadoria de G até K; esse também será o caso para outro par R', S' nas mesmas linhas verticais. Portanto, o total de aposentadoria média cresce à taxa instantânea γ.

Assim, enquanto o valor absoluto de $B(t)$ depende da taxa de indexação das aposentadorias, β, a tendência de crescimento eventual de $B(t)$ não é afetada por ela. Embora cada montante de aposentadoria individual cresça à taxa β, o montante médio de todas as aposentadorias correntes cresce à taxa γ, devido ao efeito conhecido como efeito reposição; aposentados, a todo tempo, são continuamente repostos por outros com montantes de aposentadoria mais altos, sendo estes baseados nos salários finais que crescem de acordo com a força γ.

A proporção $B(t)/S(t)$ apresentará uma tendência similar, partindo de zero e alcançando eventualmente um nível constante em um ponto no tempo, digamos $t = w_2$, quando o sistema alcança o que denominamos de maturidade financeira. É evidente que a maturidade demográfica precederá geralmente a maturidade financeira e que quanto mais generosos os créditos por serviços passados concedidos à população inicial, mais cedo o sistema alcançará a maturidade financeira. Isso está ilustrado na figura 2.

À parte as características de $B(t)$, conforme já descritas, a relação entre $B(t)$ e $S(t)$ é particularmente importante para a discussão de sistemas financeiros. Simbolicamente,

$$B'(t) > 0 \tag{1.2a}$$

$$\frac{B'(t)}{B(t)} > \frac{S'(t)}{S(t)} \qquad (t < w_2) \tag{1.2b}$$

$$\frac{B'(t)}{B(t)} = \frac{S'(t)}{S(t)} = \rho + \gamma \qquad (t \geq w_2) \tag{1.2c}$$

Até este momento as despesas de operação do sistema não têm sido mencionadas.

Se as despesas com a operação do sistema são financiadas independentemente, por exemplo, por recursos orçamentários do governo, elas são claramente não relevantes. Onde isso não ocorre, essas despesas necessitam ser consideradas.

Nos estágios iniciais de um novo sistema de aposentadorias, as despesas de administração devem predominar, mas à medida que o sistema amadurece, a importância dessas em relação às despesas com benefícios cairá consideravelmente. Despesas administrativas, no longo prazo, podem ser consideradas como proporcionais às despesas com benefícios, ou ainda, como relacionadas de forma aproximadamente linear às despesas com benefícios e aos salários segurados. Em ambos os casos, a função despesas total se relacionará com a função salários segurados de forma semelhante ao que ocorre com a função despesas com benefícios. Portanto, as características indicadas em (1.2) podem ser mantidas mesmo se definimos $B(t)$ de forma a incluir as despesas administrativas. Essa é a forma como será tratada essa questão daqui por diante.

1.5. A Base Teórica dos Métodos de Financiamento

Sistemas de previdência social, que são de responsabilidade de governos nacionais, são assumidos como tendo duração infinita, isto é, toma-se como certo que existirá um fluxo regular infinito de novos entrantes no futuro. Em virtude disto, métodos de financiamento de sistemas de previdência social são baseados na abordagem conhecida como *fundo aberto,* que considera a população inicial e os futuros entrantes como um único grupo para esse propósito. Qualquer método de financiamento essencialmente objetiva alcançar um equilíbrio entre receitas e despesas, sem necessariamente igualar as contribuições com a despesa corrente, que é apenas um dos caminhos para isto. De fato, uma conseqüência importante do processo de maturação de um sistema de previdência, descrito na seção 1.4 acima, é que existe, teoricamente, uma infinidade de métodos de financiamento que podem ser aplicados.

Para a discussão de métodos de financiamento, duas funções adicionais serão neste momento introduzidas:

• A função taxa de contribuição $C(t)$, que caracteriza o método de financiamento; e

• A função reservas $V(t)$, que representa o excesso de entradas sobre as saídas, acumulada com juros de força δ.

Essas funções relacionam-se às funções $B(t)$ e $S(t)$ através da equação diferencial fundamental (Zelenka, 1958, p. 69):

$$dV(t) = V(t)\delta\,dt + C(t)S(t)dt - B(t)dt \qquad \textbf{(1.3)}$$

Em outras palavras, a variação nas reservas em qualquer pequeno intervalo de tempo é igual ao rendimento do investimento das reservas no intervalo mais o excesso da receita de contribuições sobre a despesa com benefícios no mesmo intervalo.

Integrando a equação acima no intervalo (n,m), a seguinte relação é obtida entre os valores da função *reservas* em $t = n$ e $t = m$:

$$V(m)e^{-\delta m} = V(n)e^{-\delta n} + \int_n^m [C(t)S(t) - B(t)]e^{-\delta t}dt \qquad \textbf{(1.4)}$$

A expressão para $V(m)$ é então obtida como

$$V(m) = V(n)e^{\delta(m-n)} + \int_n^m [C(t)S(t) - B(t)]e^{\delta(m-t)}dt \qquad \textbf{(1.5)}$$

Em particular, pondo $n = 0$ e tomando $V(0) = 0$, a seguinte expressão retrospectiva para *V(m)* é obtida:

$$V(m) = e^{\delta m}\int_0^m [C(t)S(t) - B(t)]e^{-\delta t}dt \qquad \textbf{(1.6)}$$

Uma equação de equilíbrio para a inteira duração do sistema pode ser escrita. A equivalência de receitas e pagamentos, levando-se em conta o valor do dinheiro no tempo, pode ser expressa igualando, no início do sistema, o valor presente da série das contribuições futuras ao valor presente das despesas futuras:

$$\int_0^\infty C(t)S(t)e^{-\delta t}dt = \int_0^\infty B(t)e^{-\delta t}dt \qquad \textbf{(1.7)}$$

assumindo que as duas integrais convergem – se (1.2) se mantém e $\delta > \rho + \gamma$. A equação acima é a equação fundamental de equilíbrio para um sistema de previdência novo. Ela implica que

$$\int_0^m \left[C(t)S(t) - B(t)\right]\ e^{-\delta t}dt = \int_m^\infty \left[B(t) - C(t)S(t)\right] e^{-\delta t}dt \quad \textbf{(1.8)}$$

Substituindo na expressão (1.6), a seguinte expressão *prospectiva* é obtida para a função reservas:

$$V(m) = e^{\delta m}\int_m^\infty \left[B(t) - C(t)S(t)\right] e^{-\delta t}dt \qquad \textbf{(1.9)}$$

Se observamos o sistema em toda a sua existência, do ponto inicial, qualquer função de contribuição $C(t)$ que satisfaça a equação fundamental de equilíbrio (1.7) constitui um método de financiamento teoricamente possível para um novo sistema de previdência e leva à correspondente função *reservas* $V(m)$ dada por (1.6) ou (1.9). No entanto, questões práticas nos levam à necessidade de impor condições sobre $C(t)$ e $V(t)$.

Valores negativos de $C(t)$ – implicam que o sistema está reembolsando os contribuintes – ou valores negativos de $V(t)$ – implicam que o sistema está tomando emprestado para pagar os benefícios correntes. Necessitamos portanto excluir estas possibilidades. Simbolicamente é necessário que $C(t) \geq 0$ e $V(t) \geq 0$ para todos os valores de t. A imposição dessas e de outras restrições para $C(t)$ e/ou $V(t)$ leva-nos a vários métodos de financiamento.

1.6. O Método de Financiamento de Repartição Simples (PAY-AS-YOU-GO)

Teoricamente, o método de repartição(PAYG) pode ser definido pela condição $V(t) = 0$ para todos os valores de t. Da equação diferencial fundamental (1.3), pode então ser deduzido que

$$C(t) = \frac{B(t)}{S(t)} \tag{1.10}$$

Com referência ao diagrama de Lexis (figura 1), podemos ver que o método PAYG alcança seu equilíbrio financeiro ao longo das linhas verticais tais como ET, com as pessoas ativas arcando com o custo dos benefícios dos inativos atuais.

Na prática, o sistema não pode operar sobre uma base contínua; ele terá que ser definido com referência a um intervalo finito de tempo. Se tomamos o intervalo de um ano, o método é denominado PAYG anual ou método de avaliação anual. A condição para as reservas será que $V(t) = 0$ para todos os valores de t. Na equação (1.4), pusemos $m = n+1$ e $V(n) = V(n+1) = 0$, a alíquota de contribuição para o sistema no ano $(n+1)$ de operação é dada por

$$\text{PAYG}_{n+1} = \frac{\int_n^{n+1} B(t)e^{-\delta t}dt}{\int_n^{n+1} S(t)e^{-\delta t}dt} \tag{1.11}$$

Se os fluxos de contribuição e benefícios são uniformemente distribuídos no ano, a alíquota de contribuição pode ser expressa como:

$$\mathrm{PAYG}_{n+1} = \frac{\int_n^{n+1} B(t)dt}{\int_n^{n+1} S(t)dt} \tag{1.12}$$

As entradas de caixa durante o ano podem não coincidir exatamente com os gastos. Assim, faz-se necessário levar em consideração uma margem para variações inesperadas nos valores projetados de contribuições e pagamentos de benefícios durante o ano. É, portanto, prática comum adicionar uma pequena margem na alíquota de contribuição, suficiente para constituir uma *reserva de contingência* para fazer face às variações no fluxo de caixa.

1.7. O Método do Prêmio Médio Geral e Seus Derivativos

O método do prêmio médio geral (General Average Premium - GAP) é baseado no conceito de uma alíquota de contribuição constante aplicada durante todo o tempo de vida do sistema de previdência. Fazendo $t = m$ e $C(t) = C$ (uma constante) em (1.9), a seguinte expressão é obtida para o prêmio médio geral para o intervalo (m, ∞) :

$$C = \frac{\int_m^{\infty} B(t)e^{-\delta t}dt - V(m)e^{-\delta m}}{\int_m^{\infty} S(t)e^{-\delta t}dt} \tag{1.13}$$

Mais particularmente, se a visão é tomada no início do sistema, o prêmio médio geral – indicado por GAP – será dado por

$$\mathrm{GAP} = \frac{\int_0^{\infty} B(t)e^{-\delta t}dt}{\int_0^{\infty} S(t)e^{-\delta t}dt} \tag{1.14}$$

A discussão subseqüente é baseada no GAP definido pela equação (1.14).

Suponhamos que as funções $B(t)$ e $S(t)$ sejam particionadas como a seguir:

$$B(t) = B1(t) + B2(t); \qquad S(t) = S1(t) + S2(t)$$

onde $B1(t)$ e $S1(t)$ relacionam-se à população inicial e $B2(t)$ e $S2(t)$ relacionam-se aos futuros entrantes.

Um prêmio médio (Average Premium – AP) AP1 para a população inicial e um prêmio médio AP2 para novos entrantes podem ser determinados como segue:

$$AP1 = \frac{\int_0^\infty B1(t)e^{-\delta t}dt}{\int_0^\infty S1(t)e^{-\delta t}dt} \tag{1.15}$$

$$AP2 = \frac{\int_0^\infty B2(t)e^{-\delta t}dt}{\int_0^\infty S2(t)e^{-\delta t}dt} \tag{1.16}$$

O GAP pode então ser expresso como:

$$GAP = \frac{\mathrm{AP1}\int_0^\infty S1(t)e^{-\delta t}dt + \mathrm{AP2}\int_0^\infty S2(t)e^{-\delta t}dt}{\int_0^\infty S(t)e^{-\delta t}dt} \tag{1.17}$$

Isso mostra que o GAP pode ser considerado uma média ponderada de AP1 e AP2.

No diagrama de Lexis (figura 1), AP1 é o prêmio médio pago pelos ativos no triângulo *ABC* para suportar os benefícios dos inativos no paralelograma *BCDE*, onde AP2 é o prêmio médio pagável para aqueles na zona aberta final à direita de *AB* para suportar o custo das aposentadorias daqueles que estão na zona aberta final à direita de *BE*. O GAP pode ser interpretado de maneira similar.

O prêmio médio para a população inicial geralmente é mais alto que para os novos entrantes, devido ao efeito dos créditos de serviços passados. Mesmo se não existirem esses créditos, isso ainda ocorrerá, a menos que a fórmula de cálculo da aposentadoria não seja somente proporcional ao tempo de contribuição, o que é bastante incomum, especialmente em sistemas de previdência social. A seguinte relação de desigualdade portanto, será mantida

$$\mathrm{AP1} > \mathrm{GAP} > \mathrm{AP2} \tag{1.18}$$

Para facilitar a discussão de "capitalização total" (ver seção 1.13, acima) e para estabelecer uma ligação com os métodos de financiamento de sistemas de previdência ocupacionais – que serão discutidos no capítulo 2 – é instrutivo considerar um método de financiamento hipotético onde a população inicial pagaria seu próprio prêmio médio (AP1), enquanto os novos entrantes pagariam o prêmio médio deles (AP2). Isso é equivalente a um sistema onde a função contribuição $C(t)$ é a média ponderada de AP1 e AP2, sendo os pesos as respectivas funções salário segurados, no tempo t, da população inicial e dos novos entrantes. Para fins de identificação, esse sistema será chamado de "método de capitalização autônoma" (Autonomous Funding System - AFS), embora essa não seja a terminologia padrão. A função $C(t)$ iniciará em AP1 e gradualmente se reduzirá até AP2, quando a população inicial estará totalmente aposentada. A alíquota de contribuição nesse sistema é portanto inicialmente mais alta que no GAP, mas no final, mais baixa. Isso significa que uma maior reserva será gerada sob o método GAP.

1.8. O Método da Capitalização Terminal

Entre os vários métodos de financiamento intermediários, entre os métodos PAYG e GAP, o método de capitalização terminal merece especial atenção. Esse método de financiamento é usualmente aplicado em benefícios oferecidos por sistemas de seguro de acidentes de trabalho. Ele tem sido eventualmente aplicado também em sistemas de previdência social. Esse método tem algumas vezes sido chamado de "avaliação de capitais constituintes", em outras palavras, capitalização prévia total no momento de ocorrência da exigibilidade do prêmio.

Façamos $Ka(t)dt$ representar o valor capitalizado dos prêmios no intervalo $(t, t+dt)$. Então o valor presente dos gastos futuros com benefícios pode também ser expresso em termos da função $Ka(t)$, da seguinte forma:

$$\int_0^\infty B(t)e^{-\delta t}dt = \int_0^\infty Ka(t)e^{-\delta t}dt \tag{1.19}$$

Isso pode ser explicado utilizando-se o diagrama de Lexis (figura 1). Portanto, aposentadorias pagas ao longo da linha *BE* são descontadas em dois passos: primeiro para o ponto *B* e depois para o ponto *C*. Os lados esquerdo e direito da equação (1.19) são portanto dois diferentes caminhos para descontar gastos futuros com aposentadorias.

A equação fundamental de equilíbrio (1.7) pode portanto ser expressa como:

$$\int_0^\infty C(t)S(t)e^{-\delta t}dt = \int_0^\infty Ka(t)e^{-\delta t}dt \tag{1.20}$$

Uma óbvia solução para a equação acima, denotada por $TFS(t)$, é:

$$\mathrm{TFS}(t) = \frac{Ka(t)}{S(t)} \tag{1.21}$$

Isso resulta no método de capitalização terminal, assim chamado porque cada aposentadoria é capitalizada no momento da exigibilidade do prêmio. Com referência novamente ao diagrama de Lexis (figura 1), podemos observar que o método de capitalização terminal alcança o equilíbrio sobre as linhas tais como *ACD*, os ativos vivos sobre *AC* suportam o custo dos benefícios dos inativos em *CD*.

Se a população inicial não recebe créditos de serviço passado, $Ka(t)$ crescerá lentamente, de zero no início, até alcançar a maturidade demográfica, após o que ela se estabilizará à taxa $\rho + \gamma$. A $\mathrm{TFS}(t)$ exibirá uma tendência similar, alcançando um nível constante no início da maturidade demográfica. Se a população inicial se beneficia de créditos de serviço passado, a tendência inicial de crescimento será moderada. Se o serviço passado é totalmente creditado, $\mathrm{TFS}(t)$ poderá não variar apreciavelmente com t, e o sistema tenderá então para o método GAP.

A reserva $V(n)$ representando o valor capitalizado das aposentadorias correntes é dado por:

$$V(n) = e^{\delta n}\int_0^n \left[Ka(t) - B(t)\right]\ e^{-\delta t}dt \tag{1.22}$$

Na prática, o método de capitalização terminal não operará em bases contínuas, mas será aplicado a infinitos intervalos de tempo (por exemplo, períodos anuais). Será aqui denotado pelo acrônimo TFS.

1.9. Métodos Baseados em Períodos Sucessivos de Controle

Uma série completa de métodos de financiamento intermediários, entre os métodos PAYG e GAP, pode ser gerada dividindo-se a extensão de tempo do sistema de previdência em intervalos sucessivos de duração limitada e determinando a alíquota de contribuição para cada intervalo de tal forma que a função *reserva* $V(t)$ satisfaça uma dada condição no intervalo. Por exemplo, o período de maturidade financeira $(0, w_2)$ pode ser dividido em dois intervalos h – não necessariamente iguais – seguidos por um intervalo final (w_2, ∞).

Façamos (n, m) denotar qualquer um destes intervalos. A equação (1.4) pode ser apresentada como a equação de equilíbrio para este intervalo. Além disso, a expressão para a função *reserva* em qualquer ponto intermediário u $(n \leq u \leq m)$ – seguindo (1.5) será

$$V(u) = V(n)e^{\delta(u-n)} + \int_n^u \left[C(t)S(t) - B(t)\right] \; e^{\delta(u-t)} dt \qquad \textbf{(1.23)}$$

Sujeita às condições básicas $C(t) \geq 0$ e $V(t) \geq 0$, outras condições podem ser impostas sobre $C(t)$ ou $V(u)$. Por exemplo, se $V(n) = V(m) = 0$, o método de financiamento é aquele da avaliação sobre vários anos no tempo ao invés de anualmente, como no método PAYG. Uma reserva será formada durante cada intervalo mas deverá reduzir-se a zero ao final do intervalo. A alíquota de contribuição (denotada por C) para o intervalo será dada por

$$C = \frac{\int_n^m B(t)e^{-\delta t} dt}{\int_n^m S(t)e^{-\delta t} dt} \qquad \textbf{(1.24)}$$

Uma outra variante especifica a "taxa de reserva" no tempo $t = m$ (Hirose, 1996). Essa taxa é definida como

$$k = \frac{V(t)}{B(t)} \tag{1.25}$$

Se o valor requerido da taxa de reserva é k_0, substituindo por $V(m)$ em (1.4) e simplificando, a seguinte expressão é obtida para a alíquota de contribuição:

$$C = \frac{k_0 B(m)e^{-\delta m} + \int_n^m B(t)e^{-\delta t}dt - V(n)e^{-\delta n}}{\int_n^m S(t)e^{-\delta t}dt} \tag{1.26}$$

Mais rigorosamente, uma taxa de reserva mínima deverá ser requerida durante o intervalo (n,m). Nesse caso, a alíquota de contribuição será o máximo dos resultados da aplicação da fórmula acima para cada subintervalo (n,u), $n<m$ – na prática, para valores integrais de u.

Uma outra variante especifica a "taxa de equilíbrio" em $t=m$ (*ibid.*). Essa taxa é definida como

$$\lambda = \frac{B(t) - CS(t)}{\delta V(t)} \tag{1.27}$$

Essa taxa indica quanto do rendimento das reservas, ou da própria reserva, é usado para equilibrar as despesas correntes. Se $\lambda < 0$, nem mesmo o rendimento da reserva está sendo utilizado para este propósito; se $0 < \lambda < 1$, a parcela da renda das reservas está sendo utilizada; e se $\lambda > 1$, estão sendo utilizados o rendimento das reservas e a própria reserva. Se a taxa de equilíbrio requerida em $t=m$ é λ_0, substituindo em (1.4) obteremos, após simplificações,

$$C = \frac{B(m)e^{-\delta m} + \delta\lambda_0 \int_n^m B(t)e^{-\delta t}dt - \delta\lambda_0 V(n)e^{-\delta n}}{S(m)e^{-\delta m} + \delta\lambda_0 \int_n^m S(t)e^{-\delta t}dt} \tag{1.28}$$

Novamente, mais rigorosamente, λ_0 deve ser especificada como um máximo da taxa de equilíbrio para o total do intervalo (n,m). A alíquota de contribuição então será a máxima daquela resultante da aplicação da fórmula acima para cada subintervalo (n,u), $n < u < m$

O caso onde $\lambda = 1$ em $t = m$ (com $\lambda < 1$ para $n < t < m$) é de particular interesse. Isso significa que as reservas crescem no intervalo (n,m) e atende a um máximo local em $t = m$. Isso corresponde ao chamado método do "prêmio escalonado" que foi desenhado por atuários da OIT e largamente aplicado, particularmente, em países em desenvolvimento. Esse método será tratado na seção 1.10 abaixo.

Uma fórmula geral ligando a alíquota de contribuição no intervalo final (w_2, ∞), denotado por π, com as funções *despesa*, *salário* e *reserva* em $t = w_2$ podem ser derivadas da seguinte forma:

A equação de equilíbrio em $t = w_2$ pode ser escrita como

$$V(w_2) + \pi \int_0^{\infty} S(w_2 + z) e^{-\delta z} dz = \int_0^{\infty} B(w_2 + z) e^{-\delta z} dz \qquad \textbf{(1.29)}$$

Mas $S(w_2 + z) = S(w_2) e^{(\rho+\gamma)z}$, com uma expressão similar para $B(w_2 + z)$, devido ao *status* de maturidade financeira além de $t = w_2$.

Substituindo e simplificando, o seguinte resultado é obtido, sujeito a $\delta > \rho + \gamma$:

$$V(w_2)(\delta - \rho - \gamma) = B(w_2) - \pi S(w_2) \qquad \textbf{(1.30)}$$

1.10. Método do Prêmio Escalonado

O método do prêmio escalonado pode ser apresentado como um caso particular do método baseado em períodos sucessivos de controle. Entretanto, esse método é tratado independentemente nesta seção.

Na sua formulação original (Zalenka, 1958) esse método foi concebido da seguinte forma: uma alíquota de contribuição que deve equilibrar receitas e despesas durante um período inicial limitado de anos $(0, n_1)$ – chamado de primeiro período de equilíbrio – é determinado, mas é aplicado realmente sobre um período muito curto $(0, n_1^{'})$ durante o qual as reservas crescem continuamente e alcançam um máximo local em $t = n_1^{'}$. Uma maior alíquota de contribuição é então determinada para um segundo período de equilíbrio $(n_1^{'}, n_2)$, sob a condição $V(n_2) = V(n_1^{'})$, mas é aplicada durante um espaço de tempo menor $(n_1^{'}, n_2^{'})$ durante o qual as reservas crescem e alcançam um outro máximo local em $t = n_2^{'}$, e assim por diante.

O termo "método do prêmio escalonado" tem sido assim denominado para indicar aquele caracterizado por alíquotas de contribuição uniformemente crescentes em sucessivos períodos de controle e um fundo de reserva não decrescente (Thullen, 1964), possibilitando a escolha direta dos intervalos $(0, n_1^{'})$, $(n_1^{'}, n_2^{'})$, e assim por diante, e a determinação da respectiva alíquota de contribuição. Essa variante é discutida abaixo.

Considere qualquer intervalo (n, m). Façamos $\pi(n, m)$ representar a alíquota de contribuição neste intervalo. Assuma que as reservas alcancem um máximo local em $t = m$, $V^{'}(m) = 0$. Substituindo na equação diferencial fundamental (1.3), a seguinte expressão para a reserva final é obtida:

$$V(m) = \frac{B(m) - \pi(n,m)S(m)}{\delta} \qquad \textbf{(1.31)}$$

Substituindo $V(m)$ na expressão geral para as reservas (1.4) e simplificando, a seguinte expressão é obtida para o nível de prêmio no intervalo (n, m).

$$\pi(n,m) = \frac{B(m)e^{-\delta m} + \delta \int_n^m B(z)e^{-\delta z}dz - \delta V(n)e^{-\delta n}}{S(m)e^{-\delta m} + \delta \int_n^m S(z)e^{-\delta z}dz} \qquad \textbf{(1.32)}$$

É possível demonstrar que é suficiente ocorrer duas condições, $B^{'}(t) > 0$ e $B(t)/S(t)$ ser função não decrescente, para assegurar uma reserva positiva não decrescente em (n, m), como é requerido. Em adição, sob essas condições, o nível do prêmio calculado de acordo com a fórmula (1.32) será positivo e excederá o nível de prêmio calculado de acordo com a mesma fórmula no intervalo precedente (ver apêndice 5).

Supondo que o tempo total infinito do sistema de previdência seja dividido em $h+1$ intervalos, o último deles correspondendo ao período de maturidade financeira (w_2, ∞). Começando de $V(0) = 0$, a aplicação repetida da fórmula acima alternadamente resultará em taxas de contribuição do prêmio escalonado $\pi(1)...\pi(h)$ para cada um dos primeiros h intervalos e a reserva final correspondente. $\pi(h+1)$ pode então ser expresso em termos de $\pi(h)$ e da última taxa de contribuição PAYG da seguinte forma:

Aplicando a fórmula (1.31) para o *h*-ésimo intervalo,

$$V(w_2)\delta = B(w_2) - \pi(h)S(w_2)$$

Por outro lado, devido a (1.30)

$$V(w_2)(\delta - \rho - \gamma) = B(w_2) - \pi(h+1)S(w_2)$$

Eliminando $V(w_2)$, a seguinte expressão é obtida para $\pi(h+1)$:

$$\pi(h+1) = \pi(h)\left[1 - \frac{\rho + \gamma}{\delta}\right] + \left[\frac{\rho + \gamma}{\delta}\right]\text{PAYG*} \qquad \textbf{(1.33)}$$

Onde PAYG* denota o prêmio *pay-as-you-go* no financiamento da situação de maturidade.

Para completar esta seção, devemos mencionar uma outra variante do método de prêmio escalonado, onde a condição da reserva final é alterada da seguinte forma: a força do crescimento das reservas no fim de cada intervalo de tempo é igual à força do crescimento na situação de maturidade financeira, isto é,

$V'(t) = (\rho + \gamma)V(t)$ ao fim de cada intervalo

Nesse caso, também a expressão para a alíquota de contribuição e para a taxa de reservas – (1.31) e (1.32) – são válidas exceto que δ seja substituído por $\delta - \rho - \gamma$. Adicionalmente, $\pi(h+1) = \pi(h)$. As duas variantes do método de prêmio escalonado são aqui identificadas pelos acrônimos SCP1 e SCP2.

1.11. Análise e Comparação dos Métodos de Financiamento

O problema do financiamento de um sistema de previdência pode ser apresentado, essencialmente, como o de fixar as alíquotas de contribuição inicial e futuras em níveis considerados aceitáveis pelas partes contribuintes e, ao mesmo tempo, adequar a acumulação de reservas às necessidades de investimento projetados à capacidade de absorção da economia. Em adição, por conveniência legislativa ou administrativa, a revisão das alíquotas de contribuição não deve ser muito freqüente. Os vários métodos são analisados abaixo sob esta perspectiva.

Do ponto de vista do nível de capitalização, o método PAYG está na extremidade mais baixa da escala de praticidade de métodos de financiamento para sistemas de previdência, pois envolve uma contínua elevação na alíquota de contribuição. Além disso, a alíquota de contribuição alcançará um nível relativamente alto quando o sistema alcançar a maturidade financeira. Ao final, praticamente nenhuma reserva é acumulada.

O método GAP tem a vantagem de ter uma alíquota de contribuição constante, mas isso significa a necessidade de aplicação de uma alíquota relativamente alta desde o início. Do ponto de vista do nível de capitalização, é comum apresentar o método GAP no extremo superior da escala de praticidade de métodos de financiamento para sistemas de previdência social. Assim, o sistema levará à acumulação de reservas substanciais.

O método da capitalização terminal (TFS) tem a característica de que a reserva é adequada para cobrir as despesas futuras com benefícios já concedidos, embora isso não seja requerido para o financiamento de sistemas de previdência social.

O método de períodos sucessivos de controle fornece um equilíbrio entre as características contrárias dos métodos PAYG e GAP. Portanto, a alíquota de contribuição pode ser mantida para limitados períodos de tempo, de tal forma que a revisão de alíquotas é necessária apenas a intervalos de tempo. Além disso, a acumulação de reservas deve ser moderada. É possível razoável flexibilidade na escolha dos intervalos de tempo, no controle do nível das alíquotas de contribuição e na acumulação de reservas.

O método de prêmios escalonados fornece um nível de reservas não-decrescente, de forma que recursos considerados apenas teoricamente têm o rendimento de investimentos realizados com a reserva, mas não ela mesma. Portanto, é possível investir em ativos que não necessitem jamais ser liquidados.

1.12. Ilustração dos Métodos de Financiamento

As figuras 3 a 8 do apêndice 2 ilustram as alíquotas de contribuição e as reservas para os diversos métodos de financiamento discutidos acima. Para facilitar a comparação entre métodos, as reservas são apresentadas como múltiplos da folha de salários segurada ao invés de o serem em termos monetários. Os métodos PAYG e GAP, que são pontos convenientes de referência, são incluídos em todas asfiguras. As figuras 3 a 6 ilustram o TFS e o "método de capitalização autônoma" (AFS), incluindo a sensibilidade desses métodos para os créditos de serviço passado. As figuras 7 e 8 estão relacionadas às duas variantes do método de prêmio escalonado. Essas figuras são baseadas no sistema de previdência hipotético desenvolvido no apêndice 2.

A primeira comparação que pode ser feita é entre diferentes métodos de financiamento, para um dado nível de créditos de serviço passado. Conforme é ilustrado, existe uma regra que mostra que quanto mais baixa for a alíquota de contribuição no início, mais altas serão estas no final, e vice-versa. Com exceção do AFS, em todos os métodos, a alíquota de contribuição inicial está abaixo do nível daquela referente ao método GAP, mas no final, ao contrário, todas as alíquotas superam aquela do método GAP. Sob o método PAYG, as alíquotas iniciais são as mais baixas, mas em compensação as alíquotas finais são as mais altas. As alíquotas referentes aos métodos TFS e SCP são intermediárias entre aquelas dos métodos PAYG e GAP, aos diferentes níveis. O método AFS constitui exceção, com alíquotas iniciais mais altas e tarifas finais mais baixas que aquelas verificadas para o GAP.

Com respeito a acumulação de reservas, quanto mais baixa a alíquota final de contribuição, mais alto será o nível de reservas. Assim, o AFS produz a mais alta acumulação final, seguido pelo GAP. Os outros métodos produzem baixas reservas finais, em ordem inversa às suas respectivas alíquotas finais de contribuição.

O efeito dos créditos de serviço passado é particularmente significativo em relação aos níveis relativos do AFS, GAP e TFS. O AFS aproxima-se do método GAP quando não existem créditos, mas diverge dele substancialmente se o serviço passado é totalmente creditado. Em contraste, o TFS aproxima-se do GAP quando existe crédito total do serviço passado – nesse exemplo ilustrativo os dois métodos são idênticos – mas diverge significativamente dele quando o serviço passado não é creditado.

Essas diferentes tendências de alíquotas de contribuição e reservas implicam diferentes níveis de transferências intergeracionais, dentro do âmbito do sistema de previdência como tal. O método PAYG gera o maior nível de tais transferências. O AFS pode ser colocado como o método com nível zero de transferências dos novos entrantes para a população inicial. Todos os outros métodos envolvem alguma medida de transferência intergeracional, inclusive o método GAP. Podemos notar também que, para um dado método, quanto mais generosos são os créditos de serviços passados, maiores serão as transferências intergeracionais.

Uma comparação instrutiva pode ser feita entre as reservas geradas por qualquer dado método e aquelas geradas pelo TFS. Conforme visto anteriormente, as reservas do

TFS se igualam ao valor capitalizado das aposentadorias correntes. Quando as reservas do método em questão excedem as reservas do TFS, o equilíbrio é representado pelo valor das reservas dos indivíduos ativos, isto é, ele é a segurança dos direitos de benefícios adquiridos daquelas pessoas que ainda não se aposentaram. Embora esse ponto seja mais relevante para sistemas de previdência ocupacional, deve ser notado que muitos dos métodos de financiamento aplicados em sistemas de previdência social não devem gerar reservas suficientes nem mesmo para cobrir o valor do capital das aposentadorias correntes. As reservas do método GAP geralmente fornecem alguma cobertura no que se refere às pessoas ativas, embora isso deva ser insignificante quando créditos sobre o total do serviço passado são concedidos para os entrantes iniciais.

1.13. O Conceito de Capitalização Total em Relação ao Método GAP

O termo "capitalização total" está crescentemente sendo usado no contexto de financiamento de aposentadorias. Entretanto, é importante notar que o método GAP, que está no topo da escala de praticidade de métodos de financiamento na área de sistemas de previdência social, não é em geral de capitalização total.

Um sistema de previdência é dito ser de capitalização total se as reservas acumuladas em determinado momento são, no mínimo, iguais ao valor total dos benefícios adquiridos, que incluem, além do valor do capital das aposentadorias correntes, o valor dos benefícios a que têm direito os membros ativos até o momento em questão (Tilove, 1976, pp. 149, 152). Em outras palavras, se o sistema for encerrado, as reservas disponíveis e os rendimentos futuros da aplicação desta, devem ser suficientes para pagar todas as aposentadorias correntes até a extinção, bem como os direitos sobre benefícios futuros já adquiridos pelos membros ativos, devidos em qualquer momento sob as regras do sistema e com específica duração. Devemos notar que quando um sistema de previdência é descrito como sendo "totalmente capitalizado", não significa que o mesmo tenha alcançado uma posição totalmente capitalizada; significa que ele está caminhando para alcançar esse objetivo.

Existem, é claro, algumas dificuldades técnicas em definir aposentadorias adquiridas; por exemplo, se o futuro crescimento do salário segurado deve ser tomado em conta e se a indexação dos benefícios deve ser permitida. À parte esses problemas, a questão mais importante é se, para alguma definição de benefício adquirido, o método GAP resulta em um sistema totalmente capitalizado.

Para responder a essa questão, devemos lembrar que quando o serviço passado é totalmente creditado, o método GAP aproxima-se do método TFS, com o resultado que as reservas são praticamente iguais ao valor de capital das aposentadorias correntes. Isso significa que as reservas disponíveis para os membros ativos serão insuficientes para cobrir o valor de seus benefícios adquiridos sob qualquer definição, tal que o método GAP não conduzirá a uma posição totalmente capitalizada. De qualquer forma, foi visto que quando não existem créditos de serviço passado, o método GAP aproxima-se do AFS. A discussão no capítulo 2 mostrará que o AFS conduz a uma posição totalmente capitalizada quando a totalidade da população inicialmente segurada está aposentada.

Assim, em termos gerais, o método GAP não pode ser caracterizado como um sistema de capitalização total, embora se aproxime disso quando, por exemplo, não são concedidos créditos de serviço passado à população inicial. Portanto, o rótulo "capitalização parcial" será aplicado sem exceção para todos os métodos de financiamento empregados na área de previdência social.

2. FINANCIAMENTO DA PREVIDÊNCIA OCUPACIONAL

2.1. Introdução

Este capítulo trata de sistemas de previdência ocupacional que cobrem os empregados do setor privado e que são de responsabilidade de empregadores individuais ou criados através de negociações entre sindicatos e empregadores (planos multipatrocinados). Os princípios aqui discutidos são também aplicáveis para os sistemas públicos de previdência em regime de capitalização. O assunto não será tratado em detalhes, pois o propósito é apenas indicar as principais diferenças entre sistemas de previdência social e ocupacional no que se refere às formas de financiá-los. Como no capítulo 1, a discussão será limitada às aposentadorias baseadas em fórmulas que são estritamente proporcionais ao período de contribuição – especificamente, acumuladas à razão de 1% ao ano – e ao salário final (na aposentadoria) do membro.

As características básicas dos sistemas de previdência ocupacional – ao menos no que se refere a benefícios de aposentadoria – não são muito diferentes das características dos sistemas de previdência social, e as discussões das seções 1.3 e 1.4 podem ser consideradas válidas para os dois sistemas. Existe, entretanto, uma série de considerações especiais que levam, na prática, à adoção de sistemas de financiamento que são diferentes daqueles empregados na área de previdência social.

Assumiremos que os ativos dos sistemas de previdência ocupacional são separados dos ativos do patrocinador e mantidos por este último para benefício dos participantes. Essa separação é desejável para garantir os benefícios de aposentadoria independentemente da saúde financeira do patrocinador. Uma exceção, entretanto, é o sistema de "book reserve", sistema praticado, por exemplo, na Alemanha, onde as reservas para aposentadorias são registradas na contabilidade do patrocinador, de tal forma que os ativos previdenciários são de fato investidos no negócio do patrocinador; a garantia de recebimento dos benefícios é fornecida por um seguro contra insolvência que o patrocinador é obrigado a contratar de uma companhia de mútuo, sendo este seguro de responsabilidade de todos os sistemas de previdência que adotam o *book reserve*.

Por razões similares, o método PAYG é geralmente considerado um método não adequado para o financiamento de sistemas de previdência ocupacional. Existe o risco de o patrocinador (o empregador) tornar-se insolvente ou simplesmente fechar seu negócio, situação em que todos os direitos previdenciários (existentes ou prospectivos) seriam perdidos. Além disso, o empregador – que presumivelmente é o maior contribuinte para o sistema – pode achar tal sistema inconveniente, do ponto de vista orçamentário, devido à dificuldade de acomodar gastos que crescem continuamente no tempo em seu orçamento.

Novamente uma exceção é fornecida pelos sistemas de previdência complementar na França, baseados no método *de repartição por pontos,* que é efetivamente PAYG. Deve ser observado, entretanto, que esses sistemas são nacionais e compulsórios em cobertura, de forma que o risco é dividido entre os empregadores e, além disso, estão em avançado estado de maturidade.

Conforme veremos, as objeções acima mencionadas para a aplicação do método PAYG a sistemas de previdência ocupacional devem também valer para os vários métodos de capitalização parcial discutidos no capítulo 1, porque em caso de descontinuidade do sistema, o fundo de reserva disponível deverá cobrir apenas parcialmente os direitos de aposentadorias adquiridos e – exceto para o método GAP – a alíquota de contribuição geralmente apresenta um tendência crescente no tempo. Além disso, esses sistemas envolvem transferências intergeracionais, que são aceitáveis em sistemas de previdência social, mas não o são em sistemas de previdência ocupacional. Mesmo que esse conceito não se aplique para a contribuição do empregador, o princípio da acumulação sugere que o custo da aposentadoria de um empregado deve ser carregado durante todo o período de trabalho deste.

Por essas razões, diferentemente de um sistema de previdência social, um sistema de previdência ocupacional geralmente objetiva alcançar o equilíbrio financeiro em bases de “fundo fechado”, significando que somente os membros existentes entram na equação, excluindo-se futuros entrantes (geração futura). Dessa forma, o equilíbrio é estabelecido independentemente do recrutamento de novos entrantes. Entretanto, contanto que futuros entrantes estejam também, como grupo, em equilíbrio financeiro, o sistema também estará em equilíbrio atuarial como “fundo aberto”.

Neste capítulo, os termos “contribuições” e “taxa de contribuição” referem-se ao total de recursos financeiros alocados ao sistema, sem diferenciação entre as parcelas do empregador e do empregado. Na prática, a alíquota de contribuição dos empregados é freqüentemente fixada nos regulamentos e o pagamento do empregador é o montante requerido para completar o total das contribuições.

Quando o método PAYG é excluído, é costume utilizar a palavra “capitalização” ao invés de “financiamento”, e esta terminologia será adotada neste capítulo. Métodos de capitalização são também chamados de métodos de custo atuarial. Existe uma larga variedade de métodos de custo atuarial e os principais métodos serão brevemente apresentados a seguir. Deve ser considerado, no entanto, que a escolha do método, em qualquer caso particular, será condicionada pelo sistema regulatório em vigor. Esses regulamentos geralmente proíbem a capitalização insuficiente de maneira a assegurar aos participantes o recebimento do beneficio que lhes é devido. Por outro lado, à medida que as contribuições previdenciárias são normalmente isentas de impostos, a regulação em geral impede ou desencoraja o excesso de capitalização.

Os métodos de custo atuarial podem ser divididos em dois grupos: métodos individuais e métodos agregados. Nos métodos individuais, o resultado total é obtido pela soma dos resultados de todos os indivíduos; no método agregado, os custos são determinados em base coletiva. Os métodos podem ainda ser divididos em métodos de benefícios acumulados e métodos de idade de entrada (Trowbridge e Farr, 1976, p. 35; Bowers et alli, 1986, pp. 544, 546). Os métodos individuais serão discutidos nas seções 2.2 a 2.7 abaixo, e os métodos agregados na seção 2.8.

2.2. Métodos de Custo Individual

Os métodos de custo individual obtêm inicialmente o equilíbrio dos novos entrantes e em seguida consideram os ajustes requeridos para alcançar equilíbrio como sistema fechado para a população inicial. Tomando as aposentadorias como exemplo, as contribuições pagas pela nova geração entrante durante sua vida ativa deve gerar o valor de capital dos benefícios daqueles que alcançarão a idade de aposentadoria. No diagrama de Lexis (figura 1), o equilíbrio deve ser alcançado ao longo de linhas tais como *ABE*. Portanto, os benefícios daqueles sob a reta *BE* serão financiados por aqueles posicionados no segmento *AB*.

Por simplicidade, assumimos que todos os novos entrantes ingressam no sistema com idade b e deixam a vida ativa na idade r. Façamos $K(x)$ representar a função de contribuição relacionada à idade e $F(x)$ a função reservas por unidade de salário no momento da entrada no sistema $(b \leq x \leq r)$. Assumamos que ambas as funções são contínuas e diferenciáveis. A equação de equilíbrio no momento da entrada, por unidade de salários, pode ser escrita como:

$$\int_b^r \frac{l_z^a}{l_b^a} \frac{s_z}{s_b} K(z) e^{\gamma(z-b)} e^{-\delta(z-b)} dz = \tag{2.1}$$

$$\frac{r-b}{100} \frac{l_r^a}{l_b^a} \frac{s_r}{s_b} e^{\gamma(r-b)} e^{-\delta(r-b)} \overline{a}_r$$

onde l_x^a representa a função tábua de permanência em atividade e s_x a função escala relativa de salários, ambas consideradas contínuas e diferenciáveis, e $\overline{a}_r$ é uma anuidade vitalícia contínua pagável aos aposentados, baseada na força dos juros $\delta - \beta$. Os parâmetros δ, γ e β foram definidos na seção 1.2 do capítulo 1.

A equação acima pode ser simplificada e expressa em termos de funções comutacionais, como se segue (ver apêndice 1 e equação 6.4):

$$\int_b^r D_z^{as(\delta-\gamma)} K(z)dz = \frac{r-b}{100} D_r^{as(\delta-\gamma)} \overline{a}_r^{p(\delta-\beta)} \qquad \textbf{(2.2)}$$

onde os índices a e p respectivamente denotam funções relacionadas a pessoas ativas e aposentadas. O índice s denota a incorporação da função escala salarial s_x e finalmente o índice entre parênteses especifica a força fundamental dos juros.

Assumindo que a experiência coincide com os pressupostos iniciais, a função reserva na idade x por unidade de salário inicial pode ser derivada acumulando as contribuições pagas da idade b até a idade x, como segue:

$$F(x) = \int_b^x \frac{l_z^a}{l_b^a} \frac{s_z}{s_b} K(z) e^{\gamma(z-b)} e^{\delta(x-z)} dz \qquad \textbf{(2.3)}$$

e simplificando e expressando em termos de funções comutacionais segue-se:

$$F(x) = e^{\delta(x-b)} \int_b^x \frac{D_z^{as(\delta-\gamma)}}{D_b^{as(\delta-\gamma)}} K(z)dz \qquad \textbf{(2.4)}$$

Multiplicando-se ambos os lados por $e^{-\delta(x-b)}$ e diferenciando ambos os lados em relação a x,

$$\left[F'(x) - \delta F(X)\right] e^{-\delta(x-b)} = \frac{D_x^{as(\delta-\gamma)}}{D_b^{as(\delta-\gamma)}} K(x) \qquad \textbf{(2.5)}$$

Isso fornece a seguinte expressão para $K(x)$

$$K(x) = \frac{D_b^{as(\delta-\gamma)}}{D_x^{as(\delta-\gamma)}} \left[F'(x) - \delta F(x)\right] e^{-\delta(x-b)} \qquad \textbf{(2.6)}$$

2.3. Métodos de Custos de Benefícios Acumulados

Os métodos de custos de benefícios acumulados (também conhecidos como métodos de créditos capitalizados) capitalizam em cada intervalo de tempo a porção do último benefício de aposentadoria ganho no intervalo. Assumindo que a experiência coincida com as proposições iniciais, isso automaticamente levará o fundo de reserva $F(x)$ a igualar-se ao valor presente provável da porção do último benefício acumulado até aquela idade. Das várias variantes possíveis, selecionamos as duas seguintes para efeito de ilustração:

(a) a aposentadoria acumulada é baseada no trabalho corrente e no salário corrente, com indexação permitida após a concessão da aposentadoria: referir-nos-emos a esta variante na discussão a seguir como ACC1;

(b) a aposentadoria acumulada é baseada no trabalho corrente e o no salário projetado vigente à época da entrada em aposentadoria, com indexação permitida após a concessão: esta variante será referida como ACC2.

Método de custo de benefícios acumulados ACC1

O valor provável da porção da aposentadoria acumulada até a idade x, por unidade de salário inicial, é dado por:

$$F(x) = \frac{x-b}{100} \frac{l_x^a}{l_b^a} \frac{s_x}{s_b} e^{\gamma(x-b)} e^{-\delta(r-x)} \frac{l_r^a}{l_x^a} \bar{a}_r^{p(\delta-\beta)} \qquad \textbf{(2.7)}$$

que, após simplificações, resulta em termos de funções comutacionais

$$F(x) = \frac{x-b}{100} \left[e^{(\gamma+\delta)(x-b)} \right] \frac{s_x}{s_b} \frac{D_r^{a(\delta)}}{D_b^{a(\delta)}} \bar{a}_r^{p(\delta-\beta)} \qquad \textbf{(2.8)}$$

Multiplicando-se ambos os lados por $e^{-\delta(x-b)}$, diferenciando-os em relação a x e substituindo em (2.6), obteremos a seguinte expressão para $K(x)$:

$$K(x) = \frac{1}{100}\frac{D_r^{a(\delta)}}{D_x^{a(\delta)}}\left[1+(x-b)\left(\frac{s'_x}{s_x}+\gamma\right)\right]\bar{a}_r^{p(\delta-\beta)} \tag{2.9}$$

A expressão acima pode ser interpretada considerando o montante de contribuição $K(x)dx$ no intervalo $(x, x+dx)$ por unidade de salário corrente. A parcela entre colchetes multiplicada por dx deve representar o crescimento nas contribuições (como percentagem do salário corrente) no intervalo, a qual possui dois componentes: o percentual da contribuição já acumulada $(x-b)$ crescendo à proporção $(s'_x/s_x+\gamma)dx$ em virtude do efeito combinado da escala de salários e do crescimento salarial; e a percentagem dx referente ao trabalho no mesmo intervalo.

Método de custo de benefícios acumulados ACC2

A única diferença do ACC1 é que na expressão (2.7), $s_x e^{\gamma(x-b)}$ deve ser substituída por $s_r e^{\gamma(r-b)}$. Após simplificações, a seguinte expressão é obtida para $F(x)$ no caso de ACC2:

$$F(x) = \frac{x-b}{100}\left[e^{\delta(x-b)}\right]\frac{D_r^{as(\delta-\gamma)}}{D_b^{as(\delta-\gamma)}}\bar{a}_r^{p(\delta-\beta)} \tag{2.10}$$

A diferenciação em relação a x e a substituição em (2.6) resulta, após simplificações,

$$K(x) = \frac{1}{100}\frac{D_r^{as(\delta-\gamma)}}{D_x^{as(\delta-\gamma)}}\bar{a}_r^{p(\delta-\beta)} \tag{2.11}$$

2.4. Métodos de Custo da Idade de Entrada

Métodos de idade de entrada (também chamados métodos de benefícios projetados) procuram estabelecer um montante ou taxa de contribuição em função da idade de entrada. Nesse caso, $K(x) = K(b)$ para todos os valores de x. Da equação de equilíbrio (2.2) acima, a seguinte expressão é obtida:

$$K(b) = \frac{r-b}{100} \frac{D_r^{as(\delta-\gamma)}}{\int_b^r D_z^{as(\delta-\gamma)} dz} \bar{a}_r^{p(\delta-\beta)} \tag{2.12}$$

que também pode ser expressa como:

$$K(b) = \frac{r-b}{100} \frac{D_r^{as(\delta-\gamma)}}{\bar{N}_b^{as(\delta-\gamma)}} \bar{a}_r^{p(\delta-\beta)} \tag{2.13}$$

onde

$$\bar{N}_x^{as(\delta-\gamma)} = \int_x^r D_z^{as(\delta-\gamma)} dz$$

Assumindo que a experiência coincide com os pressupostos iniciais, a função fundo de reserva será então dada por:

$$F(x) = e^{\delta(x-b)} K(b) \frac{\int_b^x D_z^{as(\delta-\gamma)} dz}{D_b^{as(\delta-\gamma)}} \tag{2.14}$$

que pode ser expressa ainda como:

$$F(x) = e^{\delta(x-b)} K(b) \frac{\bar{N}_b^{as(\delta-\gamma)} - \bar{N}_x^{as(\delta-\gamma)}}{D_b^{as(\delta-\gamma)}} \tag{2.15}$$

Esse método de custo atuarial será referenciado pelo acrônimo ENT. Se todas as coortes ingressam no sistema na mesma idade b, $K(b)$ será o prêmio médio para todos os novos entrantes, isto é, o prêmio AP2 discutido na seção 1.7 do capítulo 1.

As figuras 9 e 10, baseadas no sistema hipotético de aposentadorias desenvolvido no apêndice 2, ilustram o funcionamento de três métodos de custo atuarial durante o período de contribuição de uma coorte entrando na idade de 20 anos e aposentando-se na idade de 65 anos. Os gráficos da função $K(x)$ na figura 9 mostram que os três métodos acumulam o benefício de aposentadoria da coorte a diferentes ritmos. A figura 10 ilustra a formação do fundo de reserva para fazer face ao valor de capital das aposentadorias durante toda a vida contributiva da coorte; o declive da curva em ordem descendente é dada por ENT, ACC2, ACC1, refletindo o ritmo relativo de acumulação.

2.5. O Passivo Atuarial Inicial e seu Pagamento

Após lidar com o problema do equilíbrio financeiro dos novos entrantes, os métodos de custos atuariais individuais consideram o ajustamento requerido para alcançar o equilíbrio financeiro do tipo fundo fechado para a população inicial.

O "custo normal", como uma função do tempo, refere-se às contribuições normais pagáveis pelos membros ativos, baseadas na função de contribuição relacionada à idade $K(x)$. Essas contribuições, entretanto, não são suficientes para produzir um equilíbrio para a população inicial se a totalidade dos créditos de serviço passado são concedidos. O déficit atuarial inicial originário desses créditos é denominado "passivo atuarial inicial."Esse valor pode ser apresentado como o custo do sistema que não será coberto por contribuições futuras de "custo normal", ou – se o serviço passado é totalmente creditado – como se o método de custos atuariais tivesse estado sempre em funcionamento (Trowbridge and Farr, 1976, pp. 23-26).

A prática usual do patrocinador com relação ao passivo atuarial inicial é efetuar pagamentos especiais acima das contribuições do "custo normal" para o sistema. Tipicamente, o nível de pagamentos será ampliado por determinado período de anos, conforme requerido pela legislação, terminando este período antes que a população inicial total tenha entrado em inatividade.

Alternativamente, esse passivo pode ser amortizado, durante a vida ativa da população inicial segurada, por um percentual dos salários da população segurada total ou apenas da população inicial. Um método extremo de amortizar a passivo atuarial inicial pode ser o de pagar somente os juros sobre esse passivo, sem que seja efetuado o pagamento do capital. Deverá ser observado que quando os planos de amortização acima mencionados são combinados com o método ENT, o sistema resultante corresponderá, respectivamente, aos métodos AFS e GAP discutidos no capítulo 1.

No caso extremo, em que nenhum crédito de serviço passado é concedido à população inicial, o passivo atuarial inicial – definido nesse caso como o custo das aposentadorias a serem pagas em virtude do trabalho futuro, que não serão cobertas por contribuições normais futuras – poderá ser negativo para certas idades da população inicial, dependendo do ritmo de capitalização em relação à idade do método de custo atuarial específico (ver figura 9). Dependendo possivelmente também da distribuição de idade da população inicial, isso poderá levar a um passivo atuarial inicial total negativo. De qualquer forma, quando são concedidos créditos de tempo de serviço passado parciais, resultando em um passivo atuarial inicial total positivo, isso poderá ser manipulado da mesma forma como descrito acima.

2.6. Comparação entre Métodos de Custos Individuais e Métodos de Financiamento de Sistemas de Previdência Social

Para comparar os métodos de custos atuariais com os métodos de financiamento de sistemas de previdência social é necessário caracterizar cada método por uma função contribuição $C(t)$ e uma função reservas $V(t)$, dependentes da variável tempo (t). A função contribuição relacionada com o tempo deve incluir dois componentes:

(a) a contribuição do "custo normal", que deve ser uma média ponderada da função contribuição relacionada à idade $K(x)$, baseada na distribuição dos salários segurados por idade no tempo t; e

(b) a contribuição adicional para amortizar o passivo atuarial inicial, isto é, o pagamento devido no tempo t, expresso como percentual da folha de salários.

Como no capítulo 1, para propósito de demonstração, assumiremos que as projeções elaboradas no início de funcionamento do sistema foram totalmente confirmadas. Portanto, qualquer ajustamento subseqüente para acomodação de ganhos ou perdas atuariais serão ignorados, embora na prática saibamos que ajustamentos certamente serão requeridos.

A função contribuição relacionada ao tempo deverá obviamente ser afetada pelas características demográficas e econômicas da população inicial. As figuras 11 e 12 relacionam-se ao sistema de previdência desenvolvido no apêndice 2. Assumiremos que os entrantes iniciais recebem o crédito integral pelo tempo de serviço passado. Como o propósito é ilustrar os métodos de capitalização e compará-los com os métodos de financiamento de sistemas de previdência social, os fundamentos e pressupostos aqui utilizados devem ser idênticos àqueles utilizados na demonstração dos métodos de financiamento no capítulo 1, embora na prática os fundamentos de um sistema de previdência ocupacional devem diferir daqueles próprios de um sistema de previdência social – por exemplo, os fundamentos dos sistemas de previdência ocupacional devem incorporar a possibilidade de saídas do sistema por desligamento, que normalmente estão ausentes nos fundamentos atuariais dos sistemas de previdência social.

Além dos métodos de benefícios acumulados (ACC1, ACC2) e de idade de entrada (ENT), o método GAP é incluído para servir como ponto de referência. Os métodos de custo demonstrados ACC1, ACC2 e ENT resolvem o problema da obrigação inicial acumulada através de pagamentos que se estendem por toda a vida ativa dos entrantes iniciais mais jovens.

Observamos que as contribuições relacionadas ao tempo serão inicialmente bem superiores às do GAP; em ordem crescente seriam ENT, ACC2, ACC1, e apenas eventualmente elas seriam fixadas a um nível abaixo do GAP, obedecendo a mesma ordem de forma inversa. Uma descontinuidade ocorrerá na função contribuição quando a amortização da obrigação inicial cessa.

Como conseqüência das tendências nas contribuições relacionadas ao tempo, as reservas acumuladas dos métodos de custos atuariais são substancialmente mais altas que aqueles relativas ao GAP, em ordem inversa aos níveis de taxas de contribuição.

2.7. Avaliação dos Métodos de Custos Atuariais Individuais

Todo método de custo atuarial pode ser julgado sob certo critério (Lee, 1986, pp. 156-160), incluindo em particular:

- estabilidade: quão elástica é a taxa de contribuição para o "custo normal" relativamente a mudanças na distribuição etária da população ativa?

- durabilidade: quão elástica é a taxa de contribuição para o "custo normal" relativamente ao fechamento do sistema para novos entrantes?

- segurança: quão favorável é o fundo de reserva relacionado ao tempo, comparativamente aos benefícios acumulados de seus membros?

Da figura 9 do apêndice 2, pode ser inferido que se a distribuição etária da população ativa desloca-se para cima, a taxa de contribuição para o "custo normal" não deverá ser afetada no método ENT e levemente afetada no método ACC, mas consideravelmente afetada (acrescido) no método ACC1. No evento de fechamento do sistema para novos entrantes, o efeito sobre ACC1 e ACC2 será similar, entretanto, mais intenso, enquanto que no método ENT a taxa de contribuição para o custo normal novamente não sofrerá alteração. Portanto, o ranking de estabilidade e durabilidade dos métodos é: ENT, ACC2, ACC1, em ordem descendente.

Em relação ao aspecto da "segurança", devido a forma como são desenhados, os métodos de custos de benefícios acumulados produzirão automaticamente, em relação aos novos entrantes, reservas que cobrirão os "benefícios acumulados" de acordo com a definição específica. Deve ser ressaltado, entretanto, que a definição do método ACC1 para benefícios acumulados é comparativamente menos generosa e esse método deve, em certas circunstâncias, ser considerado como não fornecendo segurança adequada. Com respeito aos métodos de idade de entrada, a figura 10 do apêndice 2 mostra que o ritmo de capitalização sob o método ENT é mais veloz. Isso sugere que o método ENT deve produzir, para novos entrantes, reservas que excedem os próprios benefícios acumulados de acordo com a definição ACC2.

O nível de "segurança" fornecido aos novos entrantes deve ser assegurado à população inicial somente quando o passivo atuarial inicial tiver sido totalmente liquidado. Em outras palavras, ao alcançar aquele estágio o "passivo atuarial não garantido por fundos" do sistema deverá ter sido eliminado. O sistema deverá neste momento alcançar a assim chamada "capitalização total".

2.8. Métodos de Custos Agregados

Como já mencionado, os métodos de custos agregados determinam a função taxa de contribuição relacionada ao tempo em base coletiva. Entre várias possíveis variantes, a seguinte é selecionada para ilustração.

Nesta variante (Trowbridge e Farr, 1976, p. 55: Tilove, 1976, p. 157), a função taxa de contribuição relacionada ao tempo é situada a um nível em que deve assegurar o equilíbrio financeiro em termos de sistema fechado, para o sistema em questão naquele momento, levando em conta as reservas acumuladas. Portanto, sejam:

PVB(t) = valor presente dos benefícios futuros dos membros ativos existentes (excluindo novos entrantes além da data em consideração) e inativos existentes;

V(t) = fundo de reservas acumuladas;

C(t) = função taxa de contribuição relacionada ao tempo. *Então:*

$$C(t) = \frac{\mathrm{PVB}(t) - V(t)}{\mathrm{PVS}(t)} \tag{2.16}$$

Para um novo sistema começando com zero de reservas, a função taxa de contribuição relacionada ao tempo começará em AP1 e se reduzirá suavemente e assintoticamente até AP2. Essa variante de método agregado é denominada AGG.

Quando comparada ao método ENT, o método AGG tem o passivo atuarial inicial acumulado considerado internamente ao método ao invés de tratá-lo separadamente. Com efeito, o passivo atuarial inicial será amortizado a taxas decrescentes. Uma vez que esse passivo estiver totalmente amortizado, esse método deverá tornar-se idêntico ao método ENT e alcançará a capitalização total.

Devemos lembrar que o método de capitalização autônoma "AFS" (ver seção 1.7 do capítulo 1) alcança o mesmo resultado que o método AGG, mas através de uma diferente função contribuição relacionada ao tempo aplicada durante toda a vida ativa da população inicial. Posteriormente, quando a população inicial estiver totalmente aposentada, o método AFS se tornará idêntico ao método ENT e estará portanto totalmente capitalizado ao alcançar este estágio.

O método AGG é ilustrado nas figuras 13 e 14 do apêndice 2, em relação aos métodos AFS e ENT.

Uma outra versão do método do custo agregado, que corresponde ao método de sucessivos períodos de controle – veja seção 1.9 do capítulo 1 – é baseado em projeções futuras de despesas e salários dos segurados, que são estabelecidos da mesma forma que nos sistemas de previdência social. A alíquota de contribuição para o intervalo (n, m), computado em $t = n$, levando em conta as reservas disponíveis deverá ser tal que produza uma reserva final que alcance uma proporção específica dos compromissos atuariais projetados até $t = m$. Dessa maneira, o passivo atuarial inicial pode ser progressivamente amortizado nos sucessivos intervalos de tempo.

2.9. Conclusão

Este capítulo nos mostra que os métodos de capitalização aplicados aos sistemas de previdência ocupacional são essencialmente uma extensão da família dos métodos de financiamento aplicados aos sistemas de previdência social, com o método GAP na fronteira entre as duas séries de métodos.

Os métodos dos sistemas de previdência ocupacional objetivam alcançar o estágio de capitalização total em um período de tempo razoável e finito, o que por outro lado, não é o objetivo dos sistemas de previdência social. Em outras palavras, sistemas de previdência ocupacional são consideravelmente mais previamente capitalizados que os sistemas de previdência social. Isso se traduz na prática em padrões contrários de funções contribuição e reservas relacionadas ao tempo. Os métodos de financiamento de previdência social produzem alíquotas de contribuição que são inicialmente mais baixas que no GAP mas, posteriormente, mais altas. Por outro lado, os métodos de capitalização de sistemas de previdência ocupacional geram alíquotas de contribuição inicialmente mais altas que às do GAP mas, posteriormente, mais baixas. Como conseqüência, sistemas de previdência social geralmente acumulam reservas mais baixas que o método GAP, enquanto que os sistemas de previdência ocupacional acumulam reservas mais altas.

3. TÓPICOS AVANÇADOS EM FINANCIAMENTO DE SISTEMAS DE PREVIDÊNCIA SOCIAL

3.1. Introdução

Este capítulo analisa em maiores detalhes as características dos sistemas de previdência social e os métodos de financiamento próprios destes sistemas. Serão discutidas as conseqüências do relaxamento da simplificação de alguns pressupostos feitos no capítulo 1. O efeito da determinação de parâmetros será ilustrado por meio da observação da sensibilidade de alguns prêmios às mudanças em valores paramétricos. O capítulo trata finalmente, das questão da indexação de aposentadorias e das restrições ao grau de capitalização.

3.2. As Técnicas de Projeção e de Valor Presente

Existem duas técnicas atuariais para a análise de um sistema de previdência: as abordagem da projeção e a do valor presente. Tomando-se como referência o diagrama de Lexis (figura 1), a abordagem da projeção concentra-se nas linhas verticais, enquanto que a do valor presente concentra-se nas linhas diagonais. Ambas as técnicas, entretanto, conduzem aos mesmos resultados ou conclusões se forem aplicadas às mesmas zonas do referido diagrama.

A análise desenvolvida no capítulo 1 foi baseada na abordagem da projeção, tendo sido utilizados como elementos básicos a função despesas $B(t)$ e a função salários segurados $S(t)$, introduzidas na seção 1.4. O capítulo 2, por outro lado, foi baseado na técnica do valor presente – desde que os métodos de custos atuariais discutidos nas seções 2.2 a 2.4 alcançavam o equilíbrio ao longo das diagonais – mas a passagem na seção 2.5 e posteriores, com relação às funções taxa de contribuição e reservas, ambas dependentes do tempo, foram explicitamente baseadas na equivalência das duas técnicas.

Neste capítulo recorreremos às duas abordagens, na medida em que se fizer necessário para analisar as propriedades de vários métodos de financiamento.

3.3. Extensão da Teoria para Aposentadorias por Invalidez e Pensões.

O tratamento no capítulo 1 foi limitado aos benefícios de aposentadoria por idade e tempo de contribuição. No entanto, sistemas de previdência social geralmente também cobrem riscos associados à invalidez e morte, e fornece benefícios de aposentadoria por invalidez e pensão por morte (cônjuge sobrevivente e órfãos) decorrentes do falecimento de indivíduos cobertos pelo sistema que morreram durante a vida ativa ou durante o gozo de benefício de aposentadoria por idade, tempo de contribuição ou invalidez.

O conjunto de pessoas participantes de um sistema de previdência pode ser entendido como sendo constituído de várias subpopulações distintas. No capítulo 1 as subpopulações de ativos segurados e aposentados por tempo de contribuição foram introduzidas. Aposentados por invalidez constituem uma outra subpopulação que cresce pelo fluxo de novos inválidos e se reduz pelo falecimento dos inválidos existentes. A força decremental da invalidez aplicável para pessoas em idade ativa, tal qual a força da mortalidade, é específica para gênero e idade.

Da mesma forma que no caso das subpopulações de ativos e aposentados por tempo de contribuição, discutida na seção 1.3, a subpopulação de aposentados por invalidez, para um novo sistema de previdência, está sujeito ao pressuposto da constância de determinados parâmetros, os quais crescem equilibradamente a partir de zero até alcançar a maturidade. Nesse momento, essa população terá alcançado uma distribuição etária estável e uma força de crescimento constante e igual àquela dos ativos e dos aposentados por idade e tempo de contribuição (ρ). Devemos notar entretanto que, neste caso, o tempo despendido para alcançar esse estado será mais longo. Isso se deve ao fato de que o elemento incremental, constituído por novos inválidos, somente se tornará estável quando a população ativa alcançar a maturidade; o inválido mais jovem naquele momento alcançará o limite de idade antes que o total da subpopulação de inválidos torne-se estável.

Considerações similares aplicam-se aos sobreviventes (cônjuges e órfãos), mas o tempo necessário, neste caso, para alcançar a maturidade será ainda mais longo. No caso de cônjuges, o elemento incremental, constituído por novos viúvos(as), se tornará estável somente quando as outras três subpopulações (ativos, aposentados por idade e tempo de contribuição e aposentados por invalidez) tornarem-se estáveis; o viúvo(a) mais jovem naquele momento alcançará o limite de idade antes que a subpopulação de viúvos(as) alcance a estabilidade. No caso de órfãos, o órfão mais jovem no momento acima mencionado alcançará o limite máximo de idade para o recebimento de pensão por morte.

Portanto, a inclusão de aposentadorias por invalidez e pensão por morte não afetará a tendência básica das funções despesas e salários discutidas na seção 1.4, exceto que o tempo necessário à maturação financeira seja correspondentemente estendido. A teoria do financiamento dos sistemas de previdência social desenvolvida no capítulo 1 para aposentadorias por idade e tempo de contribuição, portanto, aplica-se igualmente a um sistema de previdência social abrangente que conceda, além daqueles benefícios, os benefícios de aposentadoria por invalidez e pensão por morte.

Para fins de demonstração, continuaremos a fazer referências a aposentadorias por idade e tempo de contribuição somente, ficando implícito que os resultados aplicam-se também a aposentadorias por invalidez e pensões, a menos que o contrário seja claramente indicado.

3.4. Entrada Múltipla e Idade de Aposentadoria

O tratamento no capítulo 1 foi baseado no pressuposto que todos os novos entrantes ingressariam no sistema em uma única idade de entrada. No entanto, os mesmos argumentos aplicam-se para outras idades de entrada e, dado que a força do crescimento do número de novos entrantes (r) é a mesma para todas as idades, a soma dos resultados para as várias idades de entrada apresentará a mesma tendência característica.

Da mesma forma, no capítulo 1 uma idade de aposentadoria uniforme foi assumida. No entanto, se as aposentadorias podem ocorrer em uma grande variedade de idades, tendo como limite apenas uma dada idade máxima para aposentadoria, e dado que a força da entrada em aposentadoria em cada idade é constante no tempo, por analogia com o caso das aposentadorias por invalidez, podemos deduzir que o fato das aposentadorias ocorrerem também sobre uma larga faixa de idades não afetará as tendências básicas e a teoria desenvolvidas no capítulo 1.

Para fins de ilustração, continuaremos a fazer referência a uma única idade b de entrada no sistema e a uma única idade r de entrada em aposentadoria, entendendo-se que os resultados apresentados são válidos também para situações de múltipla entrada no sistema e de várias idades de entrada em aposentadoria.

3.5. Expressões para Funções de Novos Entrantes

Até que um sistema de previdência alcance a maturidade financeira, seu desenvolvimento financeiro será influenciado pelas características demográficas e econômicas específicas da população segurada inicial.

Uma discussão mais profunda de um sistema de previdência, particularmente a análise do efeito de determinados parâmetros, é consideravelmente simplificada em uma situação de maturidade financeira, quando a população inicial tem desaparecido de cena. Nesta seção serão desenvolvidas várias funções relacionadas a novos entrantes que aplicam-se igualmente a situações de maturidade.

Funções relacionadas à coorte entrando no tempo t

Façamos $\{l_x^a\}, b \leq x \leq r$, representar a tábua de serviço para pessoas ativas e $\{l_x^p\}, r \leq x < w$, denotar a tábua de sobrevivência para pessoas aposentadas, onde b representa a mais baixa idade de entrada no sistema, r a mais alta idade de entrada em aposentadoria e w o limite de vida.

Consideremos os novos entrantes na idade b que serão aposentados na idade r. Assumiremos como na seção 1.2 que o número de novos entrantes no intervalo de tempo $(0, dt)$ é dt e que o salário destas pessoas, no momento de entrada no sistema, é de uma unidade.

Assim, os novos entrantes no intervalo $(t, t+dt)$ alcançarão um total de $e^{\rho t}dt$ e o salário destes novos entrantes no momento da entrada será de $e^{\gamma t}$ unidades, onde ρ é a força do crescimento de novos entrantes e γ é a força de crescimento dos salários devido ao mérito.

As seguintes expressões são relativas a várias entidades relacionadas ao total de novos entrantes recrutados no tempo t. Elas são derivadas dos primeiros princípios e expressas em termos de funções comutacionais e de anuidades onde os índices superiores a e p denotam respectivamente funções relacionadas a indivíduos ativos e aposentados, o índice s indica que a função *salários devido ao mérito* s_x está incorporada e o índice entre parênteses especifica a força básica dos juros.

(a) O valor presente provável, no momento da entrada do participante no sistema, de uma anuidade no valor de uma unidade monetária por ano, pagável no momento da entrada deste indivíduo em aposentadoria:

$$e^{\rho t} \int_b^r \frac{l_z^a}{l_b^a} e^{-\delta(z-b)} dz = e^{\rho t} \bar{a}^{a(\delta)}_{b:\overline{r-b|}} \qquad \textbf{(3.1)}$$

(b) O valor presente provável, no momento da entrada do participante no sistema, de uma unidade no valor de uma unidade monetária por ano, pagável durante toda a vida do participante após aposentar-se:

$$e^{\rho t}\,\frac{l_r^a}{l_b^a}\,e^{-\delta(r-b)}\int_r^w \frac{l_z^p}{l_r^p} e^{-\delta(z-r)}dz = e^{\rho t}\,\frac{D_r^{a(\delta)}}{D_b^{a(\delta)}}\,\overline{a}_r^{\,p(\delta)} \qquad \textbf{(3.2)}$$

(c) O valor presente provável, no momento da entrada do participante no sistema, dos salários segurados, com possibilidade de progressão salarial s_x e crescimento do nível geral de salários à força γ:

$$e^{\rho t}e^{\gamma t}\int_b^r \frac{l_z^a}{l_b^a}\,\frac{s_z}{s_b}\,e^{\gamma(z-b)}e^{-\delta(z-b)}dz = e^{(\rho+\gamma)t}\,\overline{a}_{b:\overline{r-b|}}^{\,as(\delta-\gamma)} \qquad \textbf{(3.3)}$$

(d) O valor presente provável, no momento da entrada do participante no sistema, de um benefício de aposentadoria adquirido à razão de 1 por cento ao ano do salário final, por ano de trabalho, com possibilidade de indexação com força β:

$$\begin{aligned} &e^{\rho t}e^{\gamma t}\,\frac{r-b}{100}\,\frac{l_r^a}{l_b^a}\,\frac{s_r}{s_b}\,e^{\gamma(r-b)}e^{-\delta(r-b)}\int_r^w \frac{l_z^p}{l_r^p}e^{\beta(z-r)}e^{-\delta(z-r)}dz = \\ &\frac{r-b}{100}\,e^{(\rho+\gamma)t}\,\frac{D_r^{as(\delta-\gamma)}}{D_b^{as(\delta-\gamma)}}\,\overline{a}_r^{\,p(\delta-\beta)} \end{aligned} \qquad \textbf{(3.4)}$$

Funções relacionadas à população ativa e aposentada existente no tempo t

Para obter expressões para a população ativa, denotada por *A(t)* e para a população aposentada, denotada por *R(t)*, derivadas da entrada de novos segurados ingressando no sistema com idade b e para funções salários segurados e despesas com benefícios correspondentes a *S(t)* e *B(t)*, faz-se necessário apresentar cada uma destas funções como integrais das funções $Ac(x,t)$, $Re(x,t)$, $Sa(x,t)$ e $Be(x,t)$ relacionadas às variações apropriadas de x, onde x representa a idade.

A seguinte expressão para $Ac(x,t)$ e para as demais funções são obtidas através da observação de que elas são derivadas da coorte entrante no sistema no tempo $t-(x-b)$, a qual possui uma quantidade de pessoas igual a $e^{\rho(t-x+b)}$ e salários no montante de $e^{\gamma(t-x+b)}$ unidades no momento da entrada. Para este grupo as seguintes suposições são válidas: (i) sobrevivência da idade b até a idade x – de acordo com a tábua de sobrevivência até a idade de aposentadoria r e de acordo com a tábua de sobrevivência para aposentados a partir do momento em que esta ocorrer; (ii) progressão salarial de acordo com a função escala de salários; e (iii) indexação das aposentadorias após a concessão do benefício com força β:

(a) Número projetado de sobreviventes de $e^{\rho(t-x+b)}$ entrantes na idade b até a idade ativa x:

$$Ac(x,t) = e^{\rho(t-x+b)} \frac{l_x^a}{l_b^a} = e^{\rho t} \frac{D_x^{a(\rho)}}{D_b^{a(\rho)}} \tag{3.5}$$

(b) Montante de salários projetados de $Ac(x,t)$ pessoas, partindo de uma unidade salarial na idade x, e reajustada de acordo com a função s_x de escala salarial e crescimento devido ao mérito com força γ:

$$Sa(x,t) = Ac(x,t)\frac{s_x}{s_b} e^{\gamma t} = e^{(\rho+\gamma)t} \frac{D_x^{as(\rho)}}{D_b^{as(\rho)}} \tag{3.6}$$

(c) Número projetado de sobreviventes de $e^{\rho(t-x+b)}$ entrantes na idade b, até a idade de aposentadoria x:

$$Re(x,t) = e^{\rho(t-x+b)} \frac{l_r^a}{l_b^a}\frac{l_x^p}{l_r^p} = e^{\rho t} \frac{D_r^{a(\rho)}}{D_b^{a(\rho)}}\frac{D_x^{p(\rho)}}{D_r^{p(\rho)}} \tag{3.7}$$

(d) Montante projetado de aposentadorias de $Re(x,t)$ pessoas, computadas como $(r-b)$ por cento do salário – na idade de aposentadoria r – resultante da unidade salarial na idade de entrada b ajustada de acordo com a função de escala salarial s_x e escalonada com força γ, tais aposentadorias sendo indexadas com força β:

$$Be(x,t) = Re(x,t)\frac{r-b}{100}\frac{s_r}{s_b}e^{\gamma(t-x+r)}e^{\beta(x-r)} =$$

$$\frac{r-b}{100}e^{(\rho+\gamma)t}\frac{D_r^{as(\rho)}}{D_b^{as(\rho)}}\frac{D_x^{p(\rho+\gamma-\beta)}}{D_r^{p(\rho+\gamma-\beta)}} \qquad \textbf{(3.8)}$$

Integrando as funções *Ac(x, t)* e *Sa(x, t)* em relação a *x* sobre o intervalo *(b, r)* e as funções $Re(x,t)$ e $Be(x,t)$ sobre o intervalo (r,w), as seguintes expressões serão obtidas:

(a) Número total de ativos vivos no tempo *t:*

$$A(t) = e^{\rho t}\,\overline{a}^{\,a(\rho)}_{b:\overline{r-b}|} \qquad \textbf{(3.9)}$$

(b) Número total de aposentados no tempo *t:*

$$R(t) = e^{\rho t}\,\frac{D_r^{a(\rho)}}{D_b^{a(\rho)}}\,\overline{a}_r^{\,p(\rho)} \qquad \textbf{(3.10)}$$

(c) Montante total de salários no tempo *t:*

$$S(t) = e^{(\rho+\gamma)t}\,\overline{a}^{\,as(\rho)}_{b:\overline{r-b}|} \qquad \textbf{(3.11)}$$

d) Montante total de aposentadorias no tempo *t:*

$$B(t) = e^{(\rho+\gamma)t}\,\frac{r-b}{100}\,\frac{D_r^{as(\rho)}}{D_b^{as(\rho)}}\,\overline{a}_r^{\,p(\rho+\gamma-\beta)} \qquad \textbf{(3.12)}$$

O símbolo $\overline{a}_{x:\overline{n}|}^{as(\alpha)}$ – que ocorre em (3.3) e (3.11) – representa uma anuidade contínua de duração fixa, baseada na tábua de serviço para pessoas ativas e na força dos juros α. Esta anuidade deve crescer, partindo de uma unidade monetária, conforme a função *escala salarial.*

Fica claro pelas formas funcionais das expressões acima que em uma situação de maturidade, $A(t)$ e $R(t)$ crescem à taxa instantânea ρ , e $S(t)$ e $B(t)$ crescem à taxa instantânea $\rho + \gamma$; confirmando, portanto, as descobertas baseadas na argumentação geral das seções 1.3 e 1.4.

Relacionamento entre funções relativas à população existente no tempo t e funções relativas aos entrantes no tempo t.

Devemos observar que as expressões para projeções demográficas no tempo *t* – (3.9) e (3.10) – têm a mesma estrutura daquelas referentes a anuidades unitárias pagáveis aos novos entrantes recrutados no tempo t – (3.1) e (3.2) – exceto que a força da taxa de juros básica é ρ em vez de δ. E mais, as expressões para projeções financeiras no tempo *t* – (3.1) e (3.2) – têm a mesma estrutura daquelas para os valores presentes dos salários e benefícios de novos entrantes recrutados no tempo *t* – (3.3) e (3.4) – exceto que ρ substitui $\delta - \gamma$. De fato, esses resultados, que foram estabelecidos acima para benefícios de aposentadoria e para a fórmula específica de aposentadoria são, em realidade, casos particulares de teoremas mais gerais que se aplicam também para benefícios por invalidez e pensões, e para qualquer fórmula de aposentadoria. (Thullen, 1973, pp. VIII-4 VIII-11).

3.6. Prêmios em Situação de Maturidade Financeira

Limitando a consideração novamente para uma idade de entrada única b e para uma determinada idade de aposentadoria r, o prêmio de repartição simples na situação de maturidade (PAYG) é obtida através da divisão de (3.12) por (3.11):

$$PAYG^* = \frac{r-b}{100} \frac{D_r^{as(\rho)}}{D_b^{as(\rho)}} \frac{\overline{a}_r^{p(\rho+\gamma-\beta)}}{\overline{a}_{b:\overline{r-b}|}^{as(\rho)}} \qquad \textbf{(3.13)}$$

O prêmio médio para novos entrantes (denotado por AP2* para efeitos de consistência com a notação na seção 1.7) é obtido dividindo-se (3.4) por (3.3):

$$AP2^* = \frac{r-b}{100} \frac{D_r^{as(\delta-\gamma)}}{D_b^{as(\delta-\gamma)}} \frac{\overline{a}_r^{p(\delta-\beta)}}{\overline{a}_{b:\overline{r-b}|}^{as(\delta-\gamma)}} \qquad \textbf{(3.14)}$$

O prêmio para o sistema de capitais de cobertura na situação de maturidade (TFS*) é obtido multiplicando-se o número de pessoas entrando em aposentadoria no intervalo $(t, t+dt)$

$$e^{\rho t} \frac{D_r^{a(\rho)}}{D_b^{a(\rho)}} dt \qquad \textbf{(3.15)}$$

Pelo capital para aposentadoria requerido para cada aposentado,

$$e^{\gamma t} \frac{r-b}{100} \frac{s_r}{s_b} \overline{a}_r^{p(\delta-\beta)} \qquad \textbf{(3.16)}$$

o qual, após dividido por *S(t)* e simplificado, resulta na seguinte expressão:

$$TFS^* = \frac{r-b}{100} \frac{D_r^{as(\rho)}}{D_b^{as(\rho)}} \frac{\overline{a}_r^{p(\delta-\beta)}}{\overline{a}_{b:\overline{r-b}|}^{as(\rho)}} \qquad \textbf{(3.17)}$$

A similaridade da estrutura dos três prêmios é digna de atenção. Esse resultado, embora estabelecido para benefícios de aposentadoria por tempo de contribuição, para idade de entrada e de aposentadoria únicas e ainda para uma fórmula de aposentadoria específica, pode ser generalizado para aposentadorias por invalidez e pensões, para múltiplas idades de entrada e aposentadorias, como também para qualquer fórmula de aposentadoria (ibid., pp. VIII-11 a VIII-15).

Deve ser observado de (3.13), (3.14) e (3.17) que:

- o prêmio para sistemas de repartição simples depende de ρ, γ e β, mas é independente de δ:

- o prêmio médio de novos entrantes depende de δ , γ e β , mas é independente de ρ *:*

Para julgar os efeitos sobre cada prêmio decorrentes de crescimento ou decréscimo em quaisquer dos parâmetros relevantes, é conveniente considerar a estrutura da fórmula de prêmio – independentemente da alíquota $(r - b)/100$ - em duas partes.

O primeiro componente que se relaciona ao serviço ativo, pode ser escrito como

$$\frac{D_r^{as(\alpha)}}{D_b^{as(\alpha)}} \frac{1}{\overline{a}_{b:\overline{r-b}|}^{as(\alpha)}} = \frac{l_r^a s_r e^{-\alpha r}}{\int_b^r l_z^a s_z e^{-\alpha z} dz} \tag{3.18}$$

onde α denota a força relevante dos juros. Podemos observar, no lado direito da expressão, que se α cresce, o fator exponencial no numerador se reduzirá mais que proporcionalmente que a redução do fator exponencial do integrando no denominador, de tal forma que este componente da fórmula de prêmio se reduzirá.

Um argumento similar aplica-se ao segundo componente da fórmula de prêmio,

$$\overline{a}_r^{p(\alpha)} = \frac{\int_r^w l_z^p e^{-\alpha z} dz}{l_r^p e^{-\alpha r}} \qquad 3.19)$$

Portanto, qualquer mudança nos parâmetros levando ao crescimento de qualquer das forças básicas dos juros resultará em decréscimo nos prêmio e vice-versa.

Obtemos portanto, as seguintes conclusões:

- se ρ cresce, PAYG* e TFS* decrescerão, mas AP2* não será afetado;
- se γ cresce, PAYG* decrescerá e AP2* crescerá, mas TFS* não será afetado;
- se δ cresce, AP2* e TFS* decrescerão, mas PAYG* não será afetado;
- se β cresce, todos os outros, PAYG*, AP2* e TFS* também crescerão.

O caso $\beta = \gamma$ indexação dos salários) é de particular interesse. Podemos observar neste caso que os prêmios dependem somente de ρ e da diferença $\delta - \gamma$ (algumas vezes chamada de taxa real de juros, em relação ao crescimento dos salários devido ao mérito). Assim, para essa situação, as seguintes observações podem ser feitas:

- se ρ cresce, PAYG* e TFS* decrescem, mas AP2* não será afetado;

- se a taxa real de juros $(\delta - \gamma)$ cresce, PAYG* não é afetado, mas TFS* e AP2* se reduzirão. Entretanto, TFS* é menos sensível que PAYG* às mudanças em ρ e menos que AP2* às mudanças em $\delta - \gamma$ (ibid., p. IX-19).

Os efeitos sobre os vários prêmios de variações em parâmetros individuais, nos casos em que $\gamma > \beta$ e $\gamma = \beta$, são demonstrados numericamente na tabela 7 do apêndice 2 para o sistema de previdência hipotético.

Uma importante dedução que pode ser feita comparando as expressões para PAYG* e AP2* é que se $\delta - \gamma < \rho$ (isto é, $\delta < \rho + \gamma$), então o prêmio PAYG, não capitalizado, será menor que o prêmio médio de novos entrantes capitalizado. Para existir capitalização portanto, a força dos juros deve exceder a força do crescimento de novos entrantes somada à força do crescimento dos salários em razão do mérito. Essa mesma condição foi mencionada na seção 1.2.

3.7. Análise do Prêmio Médio Geral

Consideremos inicialmente o caso de indexação de salários $(\beta = \gamma)$. Denotemos por GAP* o prêmio médio geral correspondente a este caso. Como as aposentadorias estão sempre caminhando em paralelo com o nível dos salários, a função despesas – incluindo custos administrativos, sob os pressupostos estabelecidos no fim da seção 1.4 do capítulo 1 – e a função salário segurado tomarão a seguinte forma:

$$B(t) = B^*(t)e^{\gamma t} \qquad e \qquad S(t) = S^*(t)e^{\gamma t}$$

Onde $B^*(t)$ e $S^*(t)$ não envolvem γ. O prêmio médio geral (ver equação 1.14 do capítulo 1) pode portanto ser expresso como:

$$\text{GAP*} = \frac{\int_0^\infty B*(t)e^{-(\delta-\gamma)t}dt}{\int_0^\infty S*(t)e^{-(\delta-\gamma)t}dt} = \frac{\int_0^\infty B*(t)e^{-\phi t}dt}{\int_0^\infty S*(t)e^{-\phi t}dt} \tag{3.20}$$

onde ϕ denota a taxa real de juros. O efeito sobre o GAP* de mudanças na taxa de juros pode ser investigado diferenciando parcialmente a expressão acima em relação a ϕ (mantendo-se ρ constante) e considerando o símbolo de coeficiente diferencial. A expressão para o coeficiente parcial de diferenciação é o seguinte:

$$\frac{\partial(\text{GAP*})}{\partial\phi} = \text{GAP*}(\text{ADTS} - \text{ADTB}) \tag{3.21}$$

Onde ADTS e ADTB denotam os termos médios descontados de $S(t)$ e $B(t)$, respectivamente, e são dados por:

$$\text{ADTS} = \frac{\int_0^\infty tS(t)e^{-\delta t}dt}{\int_0^\infty S(t)e^{-\delta t}dt} \tag{3.22}$$

$$\text{ADTB} = \frac{\int_0^\infty tB(t)e^{-\delta t}dt}{\int_0^\infty B(t)e^{-\delta t}dt} \tag{3.23}$$

Podemos, portanto, concluir que o GAP* decrescerá quando a taxa real de juros decrescer, sujeito à condição de que o termo descontado médio da função *B(t)* deve ser maior que o da função *S(t)*. Podemos notar que se *B(t)* e *S(t)* têm as características mencionadas no final da seção 1.4, então seus termos descontados médios estarão de acordo com a condição acima. Assumiremos na seqüência que ADTB > ADTS.

O caso geral $(\beta \neq \gamma)$ é complexo, mas considerando apenas as aposentadorias por tempo de contribuição e uma idade única de entrada em aposentadoria, o prêmio médio geral pode ser expresso como:

$$\mathrm{GAP} = [\mathrm{GAP}^*] \frac{\bar{a}_r^{p(\delta-\beta)}}{\bar{a}_r^{p(\delta-\gamma)}} \tag{3.24}$$

Isso é evidente na medida em que o numerador do GAP é dado pela soma dos valores presentes prováveis dos gastos com aposentadorias das coortes individuais. Façamos *f* denotar o segundo fator do lado direito da expressão (3.24). Façamos ADT1 e ADT2 representarem os termos médios descontados das anuidades no numerador e denominador de *f*. Podemos mostrar que uma vez que $\beta < \gamma$, ADT2 > ADT1. Os coeficientes diferenciais parciais do GAP com respeito a δ e γ podem ser expressos como:

$$\frac{\partial(\mathrm{GAP})}{\partial\delta} = \mathrm{GAP}\left[-\left(\mathrm{ADTB} - \mathrm{ADTS}\right) + \left(\mathrm{ADT2} - \mathrm{ADT1}\right)\right] \tag{3.25}$$

$$\frac{\partial(\mathrm{GAP})}{\partial\gamma} = \mathrm{GAP}\left[\mathrm{ADTB} - \mathrm{ADTS} - \mathrm{ADT2}\right]$$

A primeira expressão de (3.25) indica que, sujeito à condição que ADTB – ADTS > ADT2 – ADT1, um crescimento em δ resultará em decréscimo no GAP. A segunda expressão indica que um crescimento em γ terá como conseqüência um crescimento no GAP, sujeito à condição de que ADTB – ADTS > ADT2. Mas, se GAP^* e o denominador de *f* são ambos independentes de β, é evidente por (3.24) que um crescimento em β proporcionará um crescimento no GAP.

Para analisar o efeito sobre o prêmio médio geral de mudanças na força de crescimento de novos entrantes (ρ), considere a equação (1.17) do capítulo 1. A parcela concernente à população segurada inicial obviamente não depende de ρ. AP2 também não será afetado por mudanças em ρ – veja seção 3.6 acima. Um crescimento em ρ, entretanto, fará crescer os salários dos novos entrantes e portanto elevará o peso de AP2 na equação (1.17). Isso resultará em decréscimo do GAP, se AP2 < AP1.

Os efeitos de mudanças nos parâmetros sobre o GAP e o GAP* é ilustrado na tabela 7 do apêndice 2. Com referência ao GAP*, podemos observar que um decréscimo na taxa de juros real pode ser compensado por um crescimento na força de recrutamento de novos entrantes. Isso ilustra um aspecto do intercambiamento de parâmetros biométricos e econômicos (Zelenka, 1959).

3.8. Reservas em Situação de Maturidade Financeira

Quando a maturidade é obtida em $t = w_2$, mantém-se o seguinte relacionamento entre as reservas no início da maturidade e o nível de prêmio π requerido na situação de maturidade:

$$V(w_2) = \frac{B(w_2) - \pi S(w_2)}{\delta - \rho - \gamma} \tag{3.26}$$

O resultado acima, demonstrado na seção 1.9, é válido, sujeito à condição $\delta > \rho + \gamma$, para qualquer método de financiamento que oferece um nível de prêmio de maturidade. Pode ser demonstrado que as reservas para qualquer tempo subseqüente $t = w_2 + z$ são dadas por $V(w_2 + z) = V(w_2)e^{(\rho+\gamma)z}$. Portanto, se a maturidade financeira é alcançada, a função reserva cresce na mesma proporção que as funções benefícios e salários.

A função reserva do sistema, em termos de prêmio do sistema e de prêmio de repartição simples na situação de maturidade, pode ser expressa por:

$$V(t)(\delta - \rho - \gamma) = S(t)(\mathrm{PAYG}^* - \pi) \tag{3.27}$$

Esse resultado implica que quanto mais alto o prêmio do sistema, mais baixas serão as reservas do sistema na situação de maturidade, fenômeno que foi observado de forma consistente nas ilustrações dos métodos de financiamento nos capítulos 1 e 2.

3.9. Os Efeitos dos Decrementos de Mortalidade e Invalidez

A população ativa está sujeita a dois tipos de decrementos: mortalidade e invalidez enquanto que a população aposentada está sujeita unicamente ao decremento de mortalidade. A força de cada decremento normalmente é específica para cada gênero e idade. Nesta seção, o efeito sobre os prêmios (por benefícios de aposentadoria) de assumir altos níveis de mortalidade (ou invalidez) serão discutidos.

Denotemos por μ_x^d e μ_x^i os decrementos de mortalidade e invalidez para a idade x. Então a função tábua de serviço de ativos $(b \leq x \leq r)$ será dada por:

$$l_x^a = l_b^a \exp\left(-\int_b^X (\mu_z^d + \mu_z^i) dz\right) \tag{3.28}$$

Essa expressão nos mostra que o efeito de um crescimento na força da invalidez para uma determinada idade é equivalente a um crescimento na mesma proporção na força da mortalidade para esta mesma idade.

Devemos refletir neste momento sobre este importante resultado, qual seja, um crescimento na taxa de mortalidade é equivalente a um crescimento na taxa de juros (Jordan, 1967, pp. 56-57). Desse modo, um crescimento na força da invalidez ou na força da mortalidade em um dado intervalo de idade (b, r) deve produzir o mesmo efeito que um crescimento na força da taxa de juros, neste mesmo intervalo; de forma análoga, um crescimento na força da mortalidade após aposentadoria deve produzir o mesmo efeito que uma elevação na força dos juros no mesmo intervalo de idade (r, w). Assim, um crescimento da força da mortalidade ou da força da invalidez resultará em decréscimo nos prêmios.

No entanto, deve ser notado que os efeitos acima mencionados de decrementos de mortalidade e invalidez aplicam-se somente aos prêmios de aposentadorias. Os efeitos nos prêmios de pensões por morte de uma elevação da força da mortalidade será contrário, da mesma forma que o efeito de uma elevação da força da invalidez sobre os prêmios de invalidez. Os efeitos dessas variações devem compensar-se em um sistema de seguridade social cobrindo os três riscos: aposentadoria, invalidez e morte (Thullen, 1973, p. IX-7 e IX-10).

3.10. O Efeito do Fator Densidade

O fator densidade foi definido na seção 1.2 como a proporção do tempo potencial em que membros de um dado sistema de previdência, em idade ativa, efetivamente contribuem para este sistema.

Até este momento assumimos uma densidade uniforme de 100% para todas as idades. O efeito sobre os prêmios, discutido na seção 3.6, de uma baixa densidade, possivelmente variando por idade, será considerado nesta seção. (A possibilidade de créditos de serviço durante períodos não contributivos, por exemplo, durante enfermidades, será ignorado aqui). Reconhecemos que existem outros fatores similares afetando a receita de contribuição, tais como evasão ou declarações de rendimentos sujeitos à contribuição, inferiores aos efetivamente recebidos, mas não serão objeto de discussão.

Façamos $\lambda(x)$ denotar a proporção de pessoas seguradas que estão contribuindo na idade x. Assumindo que o fator densidade afeta uniformemente todos os indivíduos de uma dada idade, o tempo total de contribuição de um novo entrante em idade b ao alcançar a idade de aposentadoria r deverá ser dado por $\int_b^r \lambda(x)dx$. É possível mostrar que assumir uma densidade diferente de 100% alterará o prêmio AP2* pelo fator λ_1/λ_2 e os correspondentes prêmios PAYG* e TFS* pelo fator λ_1/λ_3, onde λ_1, λ_2 e λ_3 são médias de $\lambda(x)$ no intervalo etário (b, r) dadas por:

$$\lambda_1 = \frac{\int_b^r \lambda(x)dx}{r-b} \tag{3.29}$$

$$\lambda_2 = \frac{\int_b^r D_x^{as(\delta-\gamma)} \lambda(x)dx}{\int_b^r D_x^{as(\delta-\gamma)} dx} \tag{3.30}$$

$$\lambda_3 = \frac{\int_b^r D_x^{as(\rho)} \lambda(x)dx}{\int_b^r D_x^{as(\rho)} dx} \tag{3.31}$$

Poderia parecer que embora a densidade diferisse de 100 por cento mas fosse constante para todas as idades, isto é, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, então os prêmios não seriam afetados. Se a densidade varia por idade, o efeitos sobre PAYG*, TFS* e AP2* dependerão da natureza da funções $\lambda(x)$, $D_x^{as(\rho)}$ e $D_x^{as(\delta-\gamma)}$. Por exemplo, se $\lambda(x)$ for uma função crescente de x e a função escala de salários for horizontal, então λ_1 deverá ser maior que λ_2 e λ_3, de forma que os três prêmios se elevarão.

3.11. A Implicação do Nível de Capitalização para a Indexação de Aposentadorias

Para os propósitos desta seção, as forças de juros e crescimento de salários devido ao mérito são consideradas como funções do tempo, $\delta(t)$ e $\gamma(t)$. Nas equações (3.14) e (3.17) , se β é igual a γ, as expressões para AP2* e TFS* envolverão somente a diferença $\delta-\gamma$. Esse também será o caso do GAP* – ver equação (3.20). Portanto, se uma elevação na força de crescimento dos salários devido ao mérito $\gamma(t)$ for compensada por um aumento correspondente na força dos juros $\delta(t)$, a diferença permanecerá inalterada. Será, então possível prosseguir indexando os salários sem que para sejam necessárias mudanças nos prêmios computados para uma dada taxa de juros. As conseqüências do fenômeno mais comum da elevação na força de crescimento dos salários devido ao mérito $\gamma(t)$ sem uma elevação compensatória na taxa de juros será discutido a seguir (ibid., pp. X-4 a X-6)

Considere especificamente um crescimento isolado, não antecipado e proporcional de *k* nos salários segurados no tempo *t*. Isso repercutirá sobre todos os futuros salários, que crescerão na mesma proporção. Façamos k_1 representar o ajuste proporcional que poderá ser efetuado nas futuras aposentadorias. As equações a seguir representam os ajustamentos proporcionais ocorridos antes e após o crescimento dos salários:

$$V(t)e^{-\delta t}=\int_t^{\infty}B(z)e^{-\delta z}dz-\int_t^{\infty}C(z)S(z)e^{-\delta z}dz \tag{3.32}$$

$$V(t)e^{-\delta t}=(1+k_1)\int_t^{\infty}B(z)e^{-\delta z}dz-(1+k)\int_t^{\infty}C(z)S(z)e^{-\delta z}dz \tag{3.33}$$

Combinando as duas equações e simplificando, obtemos

$$\frac{k_1}{k}=1-\frac{V(t)e^{-\delta t}}{\int_t^{\infty}B(z)e^{-\delta z}dz} \tag{3.34}$$

Devemos observar que $0<k_1<k$. Além disso, quanto mais baixo for o valor da reserva *V(t)*, mais alta será a razão k_1/k . Somente quando $V(t)=0$, isto é, quando o sistema for de repartição simples, obteremos $k_1=k$, neste caso as aposentadorias poderão ser totalmente ajustadas para este crescimento isolado de salários.

Se fizermos uma distinção entre as aposentadorias correntes ao tempo *t* e aquelas que serão concedidas no futuro e se consideramos que qualquer crescimento nos salários segurados aumentará na mesma proporção as aposentadorias que serão concedidas devido a fórmula de cálculo das aposentadorias – por exemplo, se as aposentadorias são baseadas no último salário – e se adicionalmente fazemos k_2 representar o crescimento proporcional nas aposentadorias existentes, então a equação de equilíbrio após o crescimento nos salários será então dado por:

$$V(t)e^{-\delta t} = (1+k)\int_t^{\infty} B_a(z)e^{-\delta z}dz + (1+k_2)\int_t^{\infty} B_b(z)e^{-\delta z}dz$$
$$-(1+k)\int_t^{\infty} C(z)S(z)e^{-\delta z}dz \tag{3.35}$$

onde $B_b(z)$ representa os gastos no tempo z em aposentadorias correntes no tempo t e $B_a(z)$ os gastos em aposentadorias a serem concedidas após o tempo t. Representando a reserva para aposentados no tempo t por $V_b(t)$ e para pessoas ativas por $V_a(t)$, onde $V_a(t)+V_b(t)=V(t)$, combinando esta expressão com a equação (3.32) e simplificando em seguida, a relação abaixo é obtida:

$$\frac{k_2}{k} = -\frac{V_a(t)}{V_b(t)} \tag{3.36}$$

Este resultado demonstra que somente se a reserva para pessoas ativas for negativa (isto é, $V(t) < V_b(t)$) , significando que o método de financiamento envolve um nível de capitalização mais baixo que o método de financiamento de capitais de cobertura) será possível obter algum ajustamento para as aposentadorias existentes.

Por conseguinte, o nível de capitalização age como uma restrição para a indexação de aposentadorias. Isso pode parecer paradoxal, mas a explicação é que a capitalização forma uma provisão para futuras despesas com aposentadorias, incluindo os custos com indexação. A carência de provisões no passado em relação ao reajuste de benefícios de aposentadorias devido ao crescimento não antecipado de salários apresenta-se sob a forma de deficiência nas reservas. Embora salários futuros – e portanto contribuições – cresçam proporcionalmente, este crescimento não é suficiente para cobrir a deficiência nas reservas e, conseqüentemente, permite somente um ajuste parcial dos benefícios de aposentaria. É claro que é possível cobrir a deficiência nas reservas através do crescimento das contribuições futuras ou aumentando as reservas através da injeção de fundos adicionais, mas isso significa um abandono do plano original. Somente o método PAYG pode resistir aos efeitos do crescimento não antecipado dos salários sem modificar suas taxas de contribuição.

Por outro lado, o método PAYG é vulnerável às mudanças demográficas não antecipadas. Por exemplo, se a força do crescimento de novos entrantes, após permanecer por determinado período, constante, ao nível ρ , cai para um nível mais baixo, digamos ρ_1 , por m anos, permanecendo a partir daí constante neste nível, resultará em crescimento do prêmio PAYG* relativo as aposentadorias durante o período de $w+m-b$ anos, embora o prêmio médio para novos entrantes AP2* não seja afetado (Iyer and McGillivray, 1988, pp. 35-36).

3.12. Generalização da Teoria

A teoria desenvolvida no capítulo 1 e no presente capítulo pode ser generalizada. Alguns possíveis caminhos são mencionados nesta seção, mas não desenvolvidas em detalhes.

Incrementos ou decrementos populacionais adicionais

A teoria desenvolvida até aqui tem considerado somente dois tipos de decrementos sobre a população ativa segurada: mortalidade e invalidez. Em certas circunstâncias pode ser necessário considerar outros decrementos; em particular se existem provisões distintas em relação aos benefícios de aposentadoria. Por exemplo, pessoas ativas deixando o status de segurado devido a acidentes de trabalho não necessitam ser tratadas separadamente. A saída do sistema de previdência antes de alcançada a idade de aposentadoria é um decremento importante para sistemas de previdência ocupacional, mas não é geralmente relevante para sistemas de previdência social operando a nível nacional. De qualquer, forma a extensão para três ou mais decrementos pode ser tratada pela aplicação da teoria de decrementos múltiplos (veja apêndice 1).

Uma variação no conceito de decremento é aquela relativa à reativação da população inválida, isto é, um movimento reverso do grupo de inválidos para o grupo de segurados ativos. Com efeito, o grupo inválido estará então sujeito a dois decrementos (morte e invalidez) e aos incrementos (novas entradas e reativação). Para o tratamento da reativação veja Thullen, 1973, pp. II-16 e II-17.

Variação paramétrica no tempo

Temos assumido até aqui que os parâmetros não variam com o tempo. No entanto, é possível incorporar tal variação. Por exemplo, se a força dos juros δ é função do tempo, a equação fundamental de equilíbrio – equação (1.7) – pode ser escrita como:

$$\int_0^{\infty} C(z)S(z)\exp\left(-\int_0^{Z}\delta(u)du\right)dz = \int_0^{\infty} B(z)\exp\left(-\int_0^{Z}\delta(u)du\right)dz \qquad \textbf{(3.37)}$$

Outros parâmetros podem ser tratados de maneira similar. Formas funcionais específicas dos parâmetros – mais complexas por exemplo que a simples função $\delta(\mu)$= constante – podem ser investigadas. No entanto, a manipulação matemática de expressões tende a ser complicada, devendo ser mais interessante a utilização de métodos de simulação, como aqueles que serão discutidos na parte II deste livro, para estudar os efeitos da variação de parâmetros no tempo.

Generalização do conceito de maturidade

A maturidade demográfica e financeira discutida até aqui, baseou-se na constância dos parâmetros ρ e γ, relacionados ao que chamamos de situação "estável" madura, e que implica o crescimento exponencial de todos os agregados demográficos e financeiros. (Se $\rho = \gamma = 0$, a situação madura é descrita como "absolutamente estacionária"; os agregados demográficos e financeiros permanecerão constantes no tempo).

Um conceito mais geral é o de situação madura "relativamente estacionária" (ibid., pp. V-4 e V-17). Um sistema de previdência é dito estar em uma situação demográfica relativamente estacionária se as distribuições de idade dos segurados ativos e da população aposentada permanecem constantes, sem que estas populações cresçam exponencialmente. Em símbolos, as funções $Ac(x,t)$ e $Re(x,t)$ – denotando respectivamente as populações ativa e aposentada na idade x e no tempo t – são da forma $\psi(t)L(x)$, onde $\psi(t)$ é qualquer função de t. Se $\psi(t)$ é uma função exponencial, teremos o caso de uma situação madura demograficamente "estável" – veja equações (3.5) e (3.7).

Um sistema é dito estar em situação financeira relativamente estacionária se a função despesas com benefícios, a função salários e a função reservas estão todas crescendo à mesma taxa instantânea, sem que esta taxa seja necessariamente constante no tempo. Simbolicamente,

$$\frac{B'(t)}{B(t)} = \frac{S'(t)}{S(t)} = \frac{V'(t)}{V(t)} = \zeta(t) \qquad \textbf{(3.38)}$$

onde $\zeta(t)$ é uma função de t. Se $\zeta(t)$ for uma constante igual a $(\rho + \gamma)$, teremos o caso de uma situação madura financeiramente "estável" – ver equações (3.11) e (3.12).

O enfoque estocástico

Como já indicado no capítulo 1, seções 1.3 e 1.4, o enfoque utilizado neste livro é o determinístico. Isso significa que, dados os parâmetros fundamentais, os resultados em termos de funções atuariais são determinísticos. Sob o enfoque estocástico o valor resultante de uma função atuarial é considerada simplesmente como a média do valor esperado do resultado. O resultado efetivo possui uma distribuição de probabilidade, sendo portanto incerto, o seu valor preciso. De toda maneira, proposições probabilísticas podem ser feitas sobre a função, se a variância da distribuição puder ser determinada.

Para citar um exemplo elementar, considere o número de mortes ocorrendo em um ano, para um número inicial de l_x pessoas na idade x, dada a probabilidade de morte q_x. No enfoque determinístico, o número de mortes é tomado como um número único $d_x = l_x q_x$. No enfoque estocástico, o número de mortes, digamos y, é relacionado a uma variável estocástica que tem seu valor esperado (μ) dado por $l_x q_x$. Nesse caso simples, podemos considerar a distribuição de y como sendo uma binomial; por conseguinte, a variância da distribuição (σ^2) será dada por $l_x q_x (1 - q_x)$. Usando a aproximação normal, podemos estabelecer, por exemplo, que

$$\text{Probabilidade}(\mu - 1,96\sigma < y < \mu + 1,96\sigma) = 0,95 \quad \textbf{(3.39)}$$

Funções atuariais são geralmente funções complexas envolvendo várias variáveis. Embora a distribuição de probabilidade de cada variável seja conhecida, geralmente não é possível analiticamente derivar a distribuição de probabilidade da função e desse modo obter uma expressão algébrica para sua variância. A solução então será realizar múltiplas simulações do processo como um todo para estimar a variância a partir dos resultados obtidos. Cada simulação envolve a extração de um valor aleatório de cada variável da função atuarial.

Métodos estocásticos têm sido largamente aplicados no ramo de seguros em geral e de seguros de vida (Bowers et al., 1997; Daykin et al., 1994), mas têm sido aplicados apenas de forma limitada na área de previdência (ver, de qualquer forma, Daykin et al., 1994, pp. 435-451).

3.13. Notas Finais

Ao concluirmos este tratamento do financiamento da seguridade social, devemos chamar a atenção para a importante relação de longo prazo entre as forças da taxa de juros, crescimento demográfico e crescimento dos salários em razão do mérito $(\delta > \rho + \gamma)$, mencionada na seção 1.2. De fato, essa condição tem repetidamente surgido m vários estágios do capítulo 1 e no presente capítulo. Se essa condição não se mantém, várias integrais constantes do desenvolvimento teórico não convergem.

Um outro importante ponto diz respeito às implicações dos pressupostos paramétricos para as funções crescimento das despesas e salários segurados $B(t)$ e $S(t)$. O pressuposto de que a força do crescimento ρ e γ continuem indefinidamente no futuro implica – ver seções 1.4 e 3.5 – que uma vez alcançada a maturidade financeira, as funções $B(t)$ e $S(t)$ deverão crescer com força $\rho + \gamma$ indefinidamente no futuro. Isso, no entanto, poderia ser questionado com base no senso comum, já que o tamanho desses agregados resultantes de tal crescimento exponencial não verificado poderia, em algum estágio imaginável, exceder os recursos disponíveis para tal. Seria mais lógico, por outro lado, esperar uma queda da taxa de crescimento e a estabilização desses agregados.

Nesse sentido, devemos observar que o que intervém nas várias integrais não são os próprios agregados, mas os seus valores descontados. Dada a condição $\delta > \rho + \gamma$, a contribuição das funções despesas e salários segurados para as integrais, de fato, decresce exponencialmente, de forma que em qualquer caso elas tornam-se insignificantes ao longo do tempo. Portanto, a teoria que tem sido desenvolvida não é inconsistente com uma eventual estabilização assintótica dos agregados financeiros.

4. PLANOS DE CONTRIBUIÇÃO DEFINIDA

4.1. Introdução

Os capítulos 1 a 3 trataram dos chamados planos de "benefício definido". Nesses planos, a fórmula de cálculo de benefícios é fixada a priori e o método de financiamento e a programação de contribuição são determinados a seguir, de forma a assegurar o equilíbrio financeiro do plano.

Este capítulo trata de planos de "contribuição definida", onde a seqüência de estabelecer os benefícios e em seguida as contribuições necessárias é inversa. Assim, a taxa de contribuição é fixada a priori e o valor do benefício torna-se a variável dependente. As contribuições dos membros são acumuladas em contas individuais que rendem juros e o saldo é pago sob a forma de pecúlio ou de anuidade, caso ocorram qualquer das contingências cobertas: aposentadoria, invalidez ou morte em serviço.

Existem ainda sistemas híbridos, onde o benefício é definido, embora seja calculado por uma fórmula derivada das contribuições pagas ou fixado no maior valor entre o cálculo da contribuição definida e um determinado benefício definido. Uma outra variante é o "sistema de contribuição definida nocional". Este capítulo tratará principalmente de sistemas de contribuição definida operando à nível nacional. Isso inclui os chamados fundos de previdência nacionais e uma inovação relativamente recente, os sistemas obrigatórios de poupança.

4.2. Estrutura Atuarial

Do ponto de vista atuarial, a estrutura dos sistemas de contribuição definida é simples, embora os métodos para atribuir o retorno do investimento das contas individuais sejam relativamente complexos. Nesses sistemas não há ocorrência de subsídios cruzados sistemáticos intrageracionais ou intergeracionais durante o estágio de capitalização, dado que os membros do sistema são os titulares do investimento acumulado (ou de algo aproximado a isso) ou do que estes têm aportado (ou tem sido aportado em seu benefício). Os únicos elementos de seguridade envolvidos nesse caso relacionam-se ao arranjos para assegurar benefícios de invalidez ou morte que podem ocorrer antes da idade normal de aposentadoria, bem como o seguro contra a longevidade para as anuidades que são pagas durante o transcorrer da vida inativa dos aposentados.

Com relação aos parâmetros determinantes – ver seção 1.2 do capítulo 1 – as forças dos juros, do crescimento dos salários em razão do mérito e da inflação

(δ, γ e θ) são particularmente relevantes para a discussão dos aspectos financeiros dos sistemas de contribuição definida. Nesses sistemas, o benefício é determinado pelas contribuições e pelos juros ou retornos do investimento creditados às contas individuais. As sucessivas contribuições, por seu turno, são determinadas pela progressão salarial dos membros. Por outro lado, o valor real dos benefícios será afetado pela inflação durante o período de contribuição. Os indivíduos durante o período em que estão filiados ao sistema estão sujeitos aos riscos associados a esses fatores, em particular ao risco de que os retornos do investimento não se mantenham em níveis acima da inflação. Isso contrasta com o caso do sistema de benefícios definidos, onde esses riscos são suportados individualmente pelos responsáveis pelos planos ocupacionais ou coletivamente pelos contribuintes de um sistema de previdência social.

Com respeito ao método de financiamento, diversamente dos sistemas de benefícios definidos, não existem escolhas, já que, por definição, um sistema de contribuição definida é totalmente capitalizado em bases individuais. Além disso, para tornar o benefício definitivo significativo é usualmente necessário ter uma taxa de contribuição relativamente alta desde o início, a não ser que um esquema de contribuições relacionadas à idade seja especificado, devendo envolver níveis mais elevados de contribuição na medida em que a idade de aposentadoria se aproxima. Conseqüentemente, um sistema de previdência com contribuição definida não possui a flexibilidade de adaptação da acumulação de reservas aos investimentos necessários e à capacidade de absorção da economia nacional, algo possível para sistemas de benefícios definidos (ver seção 1.11). Em adição, a transparência do mecanismo de atribuição do retorno do investimento às contas individuais (normalmente com comunicações no mínimo anuais) tendem a restringir a política de investimentos para evitar a possibilidade de retornos negativos no curto prazo, mesmo quando isso significa abandonar um mais alto retorno potencial a longo prazo.

O processo de maturação de um novo sistema de contribuição definida é similar àquele referente a um novo sistema de benefício definido, descrito na seção 1.4 (Iyer, 1971). Sob os pressupostos simplificadores do capítulo 1, incluindo a constância de determinados parâmetros, um fundo de previdência nacional fornecendo benefícios de aposentadorias uniformes para todos os participantes somente deverá alcançar a Maturidade financeira quando o mais jovem entrante inicial alcançar a idade de aposentadoria. Um sistema de poupanças compulsórias equivalente que também paga anuidades uniformes para todos os participantes deverá alcançar sua maturidade financeira quando o mais jovem entrante inicial alcançar a idade limite de vida.

4.3. Análise do Saldo Acumulado

Para efeito deste capítulo, propomos introduzir o parâmetro γ^*, que representa a força do crescimento salarial de um participante, assumindo que ela é constante ao longo da carreira deste. Esse parâmetro representa o efeito combinado do crescimento geral de salários (γ) e da progressão salarial dos membros do sistema, devida à maturidade profissional (o efeito da curva de salários). Portanto, γ^* deve geralmente ser maior que γ e deve exceder δ.

Tomando o salário inicial anual como uma unidade monetária e a densidade de contribuição como 100%, o saldo acumulado após o período de contribuição de n anos será dado por

$$\pi \int_0^n e^{\gamma^* z} e^{\delta(n-z)} dz = \pi e^{n\delta} \overline{s}_{\overline{n}|}^{(\gamma^*-\delta)} = \pi e^{n\gamma^*} \overline{a}_{\overline{n}|}^{(\gamma^*-\delta)} \tag{4.1}$$

O saldo acumulado pode também ser expresso como:

$$\pi e^{n\delta} \overline{a}_{\overline{n}|}^{(\delta-\gamma^*)} = \pi e^{n\gamma^*} \overline{s}_{\overline{n}|}^{(\delta-\gamma^*)} \tag{4.2}$$

onde π representa a alíquota de contribuição. Matematicamente, as quatro expressões são aceitáveis, embora (4.1) deva ser preferida quando γ^* é maior que δ e (4.2) para o caso em que $\delta > y^*$. Contudo, isto é somente uma maneira de apresentação e ambas as formas $\delta - \gamma^*$ e $\gamma^* - \delta$ são usadas nos desenvolvimentos seguintes.

É útil relacionar o saldo acumulado ao salário anual final, $e^{n\gamma^*}$, que representa o poder de compra do participante antes da aposentadoria. Isso nos fornece o seguinte resultado para o saldo acumulado relativo, isto é, o saldo como um múltiplo do salário final:

$$\pi \overline{a}_{\overline{n}|}^{(\gamma^*-\delta)} \tag{4.3}$$

Isso nos mostra que o saldo acumulado relativo depende somente da diferença $\gamma^* - \delta$. Quanto mais baixa essa diferença (isto é, quanto mais alto δ em relação a γ^*), mais alto o saldo relativo acumulado.

O montante nominal total de contribuições (excluindo juros) é dado por

$$\pi \int_0^n e^{\gamma^* z} dz = \pi e^{\pi\gamma^*} \bar{a}_{\overline{n}|}^{(\gamma^*)} \tag{4.4}$$

Dividindo (4.2) por (4.4), podemos expressar o saldo acumulado como um múltiplo da soma das contribuições, o que demonstra por sua vez, a importância relativa do componente juros no saldo

$$\frac{\bar{a}_{\overline{n}|}^{(\gamma^*-\delta)}}{\bar{a}_{\overline{n}|}^{(\gamma^*)}} \tag{4.5}$$

A expressão acima, contudo, é relativa a valores monetários e está expressa, portanto, em termos nominais. Para expressar esses valores em termos reais, é necessário descontar o saldo acumulado (4.2) e o integrando do lado esquerdo de (4.4) pela inflação. Isso fornecerá a seguinte expressão para o saldo "real" como um múltiplo da soma das contribuições "reais":

$$\frac{\bar{a}_{\overline{n}|}^{(\gamma^*-\delta)}}{\bar{a}_{\overline{n}|}^{(\gamma^*-\theta)}} \tag{4.6}$$

Note que quanto mais alta a força subjacente dos juros, mais baixo será o valor da anuidade. Podemos observar que a condição para que (4.5) e (4.6) excedam a unidade é $\delta > 0$ e $\delta > \theta$, respectivamente. Se $0 < \delta < \theta$, (4.5) excederá a unidade mas (4.6) será menor que um. Nesse caso, os participantes, embora aparentemente recebam uma adição às suas contribuições na forma de juros, na realidade sofrem uma perda em termos reais sobre as contribuições que efetuam ao sistema, isto é, recebem uma taxa de juros negativa.

4.4. Análise da Anuidade de Aposentadoria

Suponhamos que o saldo seja convertido em uma anuidade, por exemplo na idade x; então, a taxa de reposição, isto é, o montante inicial da anuidade como um percentual do salário final, será obtida dividindo (4.3) pelo fator apropriado da anuidade. O caso mais simples é aquele em que a anuidade é pagável por determinado número m de anos e não é indexada. A taxa de reposição é dada por

$$\pi \frac{\overline{a}_{\overline{n}|}^{(\gamma^*-\delta)}}{\overline{a}_{\overline{m}|}^{(\delta)}} \tag{4.7}$$

Se a anuidade for indexada com força β, então o denominador do fator da anuidade deverá se referir à força $(\delta-\beta)$, que resultará em uma mais baixa taxa de reposição. Isso ilustra uma importante diferença entre sistemas de contribuição definida e de benefício definido; nestes últimos, a indexação dos benefícios, se existe, geralmente integra o próprio pacote de benefícios, por outro lado, no primeiro, a indexação tem que ser negociada contra baixas taxas de reposição.

O saldo pode ser convertido em uma anuidade perpétua indexada utilizando o fator de anuidade $\overline{a}_x^{(\delta-\beta)}$. Um componente de sobrevivência pode ser adicionado modificando o fator de anuidade. Por exemplo, uma anuidade para a esposa igual a uma proporção k da anuidade de aposentadoria pode ser acomodada substituindo o fator anuidade por $\overline{a}_x^{(\delta-\beta)} + k\overline{a}_{x/y}^{(\delta-\beta)}$, onde y representa a idade da esposa na aposentadoria.

Novamente, isso conduz a uma redução na taxa de reposição. Essa situação contrasta com sistemas de benefícios definidos, onde a pensão do sobrevivente é parte do pacote de benefícios. Em um sistema de contribuição definida existe uma compensação entre a pensão do sobrevivente e baixas taxas de reposição.

A taxa de reposição crescerá se $\gamma^* - \delta$ decrescer ou $\delta - \beta$ crescer. Portanto, uma alta taxa de juros em relação a taxa de progressão dos salários e/ou da indexação faz crescer a taxa de reposição.

4.5. O Efeito do Fator Densidade

Na discussão acima assumimos que a densidade de contribuições é de 100% ao longo do período de contribuição do participante. Se a densidade é uniforme, no entanto menor que 100%, o saldo acumulado e as entidades relacionadas a ele discutidas na seção 4.3 acima serão proporcionalmente reduzidos.

Se faltam contribuições, a densidade variará durante o período de contribuição do participante. Nesta seção, o efeito de um período de m anos sem contribuição durante o total de n anos de vida contributiva do participante será investigado.

Suponhamos que a ausência de contribuições ocorra t anos após a entrada no sistema $(0 < t < n-m)$. O saldo acumulado ao fim do período de contribuição, assumindo que a ausência de contribuições não afetou a progressão salarial, será dado por

$$\pi \int_0^t e^{\gamma^* z} e^{\delta(n-z)} dz + \pi \int_{t+m}^n e^{\gamma^* z} e^{\delta(n-z)} dz =$$
$$\pi \frac{e^{n\delta}}{\phi^*} \left[e^{\phi^* t}(1 - e^{\phi^* m}) - (1 - e^{\phi^* n}) \right] \tag{4.8}$$

onde $\phi^* = \gamma^* - \delta$. Diferenciando a expressão acima em relação a *t*, encontramos a seguinte expressão para o coeficiente diferencial:

$$\pi e^{n\delta} e^{\phi^* t}(1 - e^{\phi^* m}) \tag{4.9}$$

É obvio que o coeficiente diferencial será negativo se $\gamma^* > \delta$ e positivo para a situação inversa. As seguintes conclusões podem ser obtidas:

- a localização do período de não contribuição dentro do período total afeta o saldo;
- se a força do crescimento dos salários individuais excede a força dos juros, quanto mais cedo ocorrer a ausência de contribuições mais alto será o saldo acumulado. Na situação contrária, quanto mais tarde ocorrer a ausência de contribuições mais alto será o saldo.

As mesmas conclusões são válidas para os saldos relativos acumulados e outras entidades baseadas nele.

Por outro lado, em um sistema de benefício definido no qual o benefício de aposentadoria é baseado no salário final e é proporcional ao período de contribuição, o benefício de aposentadoria, embora afetado pelo período de não contribuição, não depende do período em que esta interrupção nas contribuições ocorreu.

4.6. A Importância do Componente Juros

As discussões nas seções 4.3 e 4.4 acima têm ressaltado a importância do elemento juros nos benefícios derivados de um sistema de contribuição definida. É claro que o elemento juros é igualmente importante em um sistema de benefício definido, mas neste, ele intervém de maneira diferente; um rendimento de juros mais alto sobre as reservas não afeta os benefícios, mas reduzirá as contribuições, que deveriam ser requeridas para um sistema financeiro que envolve algum grau de capitalização. Em um sistema de contribuição definida, por outro lado, os juros creditados aos saldos individuais em qualquer período devem ser diretamente relacionados aos rendimentos sobre os fundos do sistema investidos no mesmo período, tendo por conseguinte efeito sobre cada benefício individual. Isso sugere que tanto os sistemas de contribuição definida como aqueles de benefício definido capitalizados devem ter como objetivo a maximização do rendimento das reservas investidas. Não nos propomos aqui entrar em uma discussão dos aspectos de investimento dos fundos de reserva; mas devemos observar que existem considerações especiais que dizem respeito aos sistemas de contribuição, em particular à necessidade de confiança na proteção razoável do capital (Daykin, 1996).

4.7. A Alíquota de Contribuição para uma Taxa de Reposição Específica

Para um indivíduo entrando no sistema na idade b e aposentando-se na idade r, a alíquota de contribuição que proporcionará um benefício computado à razão de 1 por cento do salário final por ano de serviço pode ser estabelecida igualando o saldo acumulado (4.1) ao valor do benefício (pagável por toda a vida) na aposentadoria. Isso nos fornecerá a seguinte fórmula que admite indexação dos benefícios à força β :

$$\pi = \frac{r-b}{100} e^{(r-b)(\gamma^{*}-\delta)} \frac{\bar{a}_r^{p(\delta-\beta)}}{\bar{a}_{\overline{r-b}|}^{(\delta-\gamma^{*})}} \tag{4.10}$$

Essa expressão deve ser comparada com a (2.13) do capítulo 2, adaptada em termos do parâmetro γ^{*} :

$$\pi = \frac{r-b}{100} \frac{D_r^{a(\delta-\gamma^{*})}}{\bar{N}_b^{a(\delta-\gamma^{*})}} \bar{a}_r^{p(\delta-\beta)} \tag{4.11}$$

A diferença é que em (4.10) a equivalência é estabelecida na idade de aposentadoria r, enquanto que em (4.11) ela é estabelecida na idade de entrada b. A expressão (4.11) admite decrementos devidos à morte e invalidez após a idade de aposentadoria, o que significa que o prêmio computado em (4.11) será mais baixo que aquele correspondente a (4.10). É importante analisar essa diferença e observar que o prêmio fornecido pela fórmula mais simples (4.10) não é um prêmio atuarial baseado na abordagem de seguros (Ferrara e Drouin, 1996).

4.8. Transformação de Contribuição Definida em Benefício Definido ou Vice-Versa

Existem substanciais diferenças de opinião entre especialistas com respeito às vantagens e desvantagens relativas aos sistemas de contribuição definida e benefício definido (World Bank, 1994: Beattie e McGillivray, 1995). Uma solução de compromisso deve consistir em possuir os dois tipos de sistema simultaneamente, em camadas complementares (Iyer, 1993). A reforma de um sistema de previdência social pode, portanto, envolver a transformação, parcial ou total, de um sistema existente em qualquer das duas direções. As implicações financeiras de tais transformações serão discutidas abaixo.

Se um sistema de contribuição definida é transformado em um sistema de benefício definido, uma questão importante concerne à destinação dos saldos financeiros acumulados, de propriedade dos participantes, existentes no momento da mudança. As opções possíveis incluem (McGillivray, 1992, pp. 51-54):

(a) pagamento imediato dos saldos acumulados;

(b) congelamento dos saldos e pagamento dos mesmos, com a continuada adição de juros, como e quando forem devidos, de acordo com as regras do sistema anterior;

(c) conversão dos saldos em anuidades na data da transformação;

(d) conversão dos saldos acumulados em créditos de aposentadoria.

A opção (d) é geralmente a preferida pela vantagem que ela apresenta ao permitir que o sistema de benefício definido funcione desde o início. Os membros podem ter a opção de converter somente uma parte de seus saldos em créditos e receber o restante sob as regras antigas.

A expressão a seguir é uma fórmula simples de conversão de saldos acumulados em períodos de serviço para efeitos de um sistema de benefício definido. Se, por exemplo, BAL representa o saldo acumulado; SAL, o salário na data da conversão e CR a alíquota de contribuição sob um sistema de contribuição definida, o período de serviço creditado pode ser expresso como

$$CDT = \frac{BAL}{SAL \times CR} \tag{4.12}$$

Essa fórmula estima o serviço passado exatamente se durante todo o período de cobertura do participante, a taxa de juros creditada ao saldo fosse igual à taxa de crescimento do salário de contribuição, e a alíquota de contribuição sob o sistema de contribuição definida permanecesse constante. Se isso não se verifica, a fórmula deve ser ajustada.

O valor adicional de aposentadoria ganha em virtude do CDT deverá, em geral, diferir do pagamento periódico resultante da conversão do BAL em uma anuidade, de acordo com a abordagem da seção 4.4 acima.

No caso oposto, quando um sistema de benefício definido parcialmente capitalizado é transformado em um sistema de contribuição definida totalmente capitalizado, existirá uma responsabilidade acumulada não capitalizada relativa ao serviço passado de segurados existentes no momento da transformação, devida aos benefícios não totalmente capitalizados do sistema de benefício definido. Essa situação é similar àquela do início de um sistema de previdência ocupacional, conforme discutido no capítulo 2. A amortização desse passivo deve requerer contribuições especiais adicionais ou, no caso de um sistema de previdência social, que o governo assuma esta responsabilidade. Mas, à medida que tal transformação requer que a geração de transição suporte uma dupla carga (isto é, o pagamento de aposentadorias dos aposentados correntes e as contribuições para sua própria conta individual), a última alternativa é normalmente utilizada.

PARTE II – TÉCNICAS

5. A TÉCNICA DE PROJEÇÃO PARA AVALIAÇÕES ATUARIAIS

5.1. Introdução

A parte II deste livro refere-se aos aspectos práticos da administração atuarial dos sistemas de previdência social. Este capítulo trata da técnica de projeção, que corresponde à primeira das duas abordagens para a análise de sistemas de previdência social, mencionadas na seção 3.2 do capítulo 3. A técnica do valor presente, que corresponde à segunda abordagem, é matéria do capítulo 6.

Não é propósito deste capítulo a produção de um programa de computador que possa ser rapidamente utilizado para a elaboração de projeções. O propósito é elaborar as bases e a metodologia da técnica de projeção. Embora os benefícios por invalidez e as pensões por morte estejam incluídas no tratamento do tema, as ilustrações referem-se, como na Parte I, principalmente aos benefícios de aposentadoria e a uma fórmula simples de cálculo de aposentadorias, diretamente relacionada ao período trabalhado e ao salário final.

5.2. Avaliações Atuariais de Sistemas de Previdência Social

No capítulo 1, a teoria do financiamento dos sistemas de previdência social foi desenvolvida sob o pressuposto de que as previsões elaboradas no início do funcionamento de um sistema efetivamente se realizariam. Entretanto, isso é extremamente improvável e, na prática, a experiência diverge dos valores projetados. Em primeiro lugar, porque os valores atuais de determinados parâmetros devem diferir daqueles assumidos no início; em segundo lugar, porque existirão variações estocásticas em torno destes parâmetros. Além disso, o escopo de aplicação do sistema ou as provisões de benefícios do sistema sofrerão modificações neste ínterim. Como resultado, qualquer que seja o método de financiamento adotado no início, à medida que os acontecimentos fluam, existirão ganhos ou perdas atuariais, que terão seus efeitos cumulativos refletidos no fundo de reserva acumulado.

Existe ainda a questão do valor aportado ao fundo de reserva, já que este não será representado em geral por uma conta no banco rendendo juros, mas deverá ser investido em uma variedade de ativos (títulos de renda fixa, ações, títulos públicos, etc.), para os quais existem diferentes abordagens para avaliação (valor de aquisição, valor de mercado, valor futuro descontado, etc.). Portanto, podemos esperar que no tempo $t = n$, data da avaliação atuarial, o fundo de reserva divergirá do valor projetado que foi designado como $V(n)$ no capítulo 1. Para deixar patente esta diferença, o valor destinado ao fundo de reserva será denotado neste capítulo por $Fd(n)$.

Um segundo aspecto concerne aos pressupostos paramétricos relacionados ao futuro. Os pressupostos assumidos na avaliação atuarial precedente – em $t = n$ - para o período (n, m) não devem ser considerados apropriados em $t = m$, com base na análise da experiência entre avaliações. As modificações necessárias para o arranjo do financiamento precisam ser efetuadas por ocasião da avaliação atuarial do sistema empreendida em $t = m$, baseadas nos pressupostos revistos no que se refere aos parâmetros e aportando o crédito necessário para o fundo de reserva acumulado, avaliado em $Fd(m)$.

Avaliações atuariais de sistemas de previdência social fazem parte geralmente de requerimentos obrigatórios a serem realizados em intervalos periódicos (três a cinco anos). Em adição, nos intervalos entre uma avaliação atuarial e outra, avaliações internas devem, algumas vezes, ser efetuadas. Em virtude da abordagem de fundo aberto e da aplicação de capitalização parcial, a técnica de projeção é a técnica apropriada para a avaliação de sistemas de previdência social. O propósito principal da avaliação periódica de um sistema em andamento é testar sua solvência a longo prazo, isto é, assegurar que, sob o arranjo financeiro em vigor, o sistema é capaz de saldar os compromissos correntes, mantendo ao mesmo tempo o fundo de reserva no nível requerido. Nessa matéria, assumem importância particular as mudanças nas projeções de receitas e despesas em sucessivas avaliações, que devem sinalizar para a necessidade de modificações no arranjo para o financiamento do sistema. Quaisquer propostas de modificações significativas no sistema devem requerer uma análise efetuada através de uma avaliação atuarial *ad hoc*. Em casos de avaliações atuariais iniciais precedendo a introdução de um novo sistema, é desejável a comparação de métodos de financiamento alternativos. Tendo em vista a incerteza dos pressupostos sobre o futuro, testes de sensibilidade com base em múltiplas projeções também são indicados (McGillivray, 1996; Picard, 1996).

5.3. Metodologias Alternativas de Projeção

Existem três diferentes metodologias para projeções de sistemas de previdência social. Eles incluem (Crescentini & Spandonaro, 1992):

(a) métodos atuariais;

(b) métodos econométricos;

(c) métodos mistos.

Métodos classificados sob o item (a) acima têm sido longamente aplicados no campo dos seguros e se revelado instrumentos valiosos para projeções de sistemas de previdência social. Os métodos classificados sob o item (b) são, em realidade, extrapolações de dados passados, utilizando técnicas de regressão. Essencialmente, a diferença entre os dois é que métodos atuariais dependem de fatores endógenos (isto é, internos ao modelo), enquanto os métodos econométricos são baseados em fatores exógenos. Métodos classificados sob o item (c) estão baseados parcialmente em fatores endógenos e exógenos. Este capítulo está principalmente focado em métodos classificados sob a alínea (a) acima e para alguma extensão naqueles classificados sob a alínea (c).

Uma abordagem que pode ser utilizada quando uma parcela substancial da população encontra-se coberta e o sistema de previdência está próximo da maturidade é usar a projeção da população nacional ou da força de trabalho como base e aplicar as proporções apropriadas aos resultados das projeções nacionais para derivar as projeções da seguridade social. Neste capítulo, um método mais geral de projeção de sistemas de previdência, conhecido como método dos componentes, será descrito. Entretanto, isso não exclui a referência à projeção da população nacional ou da força de trabalho para determinar certos fatores ou elementos da projeção.

O *método dos componentes*, como o próprio nome sugere, divide a população coberta em vários componentes e simula a evolução de cada componente no tempo. A extensão da divisão em componentes dependerá da disponibilidade de dados para a avaliação e também da capacidade de computação disponível pelo atuário. A divisão mínima requerida é por categoria de pessoas cobertas (isto é, segurados ativos, aposentados, inválidos e sobreviventes – viuvo(a)s e órfãos). Essas categorias devem ainda ser abertas por sexo e idade simples. Divisões adicionais podem incluir a análise da população ativa por serviço passado e por nível de renda. A esse respeito, é evidente que divisões adicionais somente se justificam se resultarem em projeções mais precisas.

Em complementação aos dados iniciais, o arquivo de entrada inclui pressupostos sobre os parâmetros – tais como aqueles mencionados na seção 1.2 – que afetarão a evolução dos vários componentes dos agregados em questão. A metodologia deverá ser adequada ao nível de complexidade dos pressupostos; em outras palavras, dependerá da natureza dos pressupostos. A metodologia pode algumas vezes ser simplificada – como indicada, por exemplo, na seção 5.13, abaixo. Isso sugere que, em termos gerais, os pressupostos paramétricos devem ser mantidos os mais simples possíveis, a menos que existam fortes evidências do contrário.

Este capítulo discute metodologias alternativas para o método dos componentes, que dependerão, de um lado, da natureza dos dados disponíveis e, de outro, da natureza dos pressupostos com relação aos parâmetros determinantes.

5.4. Projeções Demográficas: Descrição Geral

O primeiro passo na técnica de projeção é a produção das estimativas de números de indivíduos em cada um dos principais subgrupos populacionais (ativos, aposentados, inválidos, sobreviventes – viúvo(a)s e órfãos) em pontos discretos no tempo $(t = 1, 2...)$, começando de um dado valor inicial (em $t = 0$).

O procedimento de projeção demográfica pode ser considerado como a interação de uma operação de multiplicação de matrizes, da seguinte forma (baseado em Crescentini & Spandonaro, 1992):

$$n_t = n_{t-1} Q_{t-1} \tag{5.1}$$

na qual n_t é um vetor linha com seus elementos representando os valores das projeções demográficas no tempo *t,* e Q_{t-1} é a matriz quadrada de probabilidades de transição para o intervalo $(t-1, t)$, que toma a forma:

$$n_t = \begin{bmatrix} A(t) & R(t) & I(t) & W(t) & O(t) \end{bmatrix}$$

$$Q_t = \begin{bmatrix} p^{(aa)} & q^{(ar)} & q^{(ai)} & q^{(aw)} & q^{(ao)} \\ 0 & p^{(rr)} & 0 & q^{(rw)} & q^{(ro)} \\ 0 & 0 & p^{(ii)} & q^{(iw)} & q^{(io)} \\ 0 & 0 & 0 & p^{(ww)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p^{(oo)} \end{bmatrix}$$

Os elementos da matriz e os símbolos nela contidos têm o seguinte significado:

$p^{(rr)}$ denota a probabilidade de permanência no estado r ;

$q^{(rs)}$ denota a probabilidade de transição do estado r para o estado s;

a, r, i, w e *o*, representam ativos, aposentados, inválidos, viúvos/viúvas e órfãos, respectivamente.

O procedimento acima, entretanto, não é aplicável ao número total de indivíduos nas subpopulações. Para melhorar a precisão, cada subpopulação deve ser dividida no mínimo por sexo e idade. Preferivelmente a população ativa deve ser subdividida ainda pelo tempo de serviço passado. O procedimento deve ser aplicado ao nível de subdivisão mais baixo, após o que devem ser agregados para fornecer os totais e subtotais. A matriz Q deverá ser específica por sexo e idade; ela pode também variar a qualquer momento, se tal for requerido. A inclusão dos sobreviventes leva à necessidade de um procedimento adicional, requerido após cada iteração, para classificar nas idades adequadas y (viúvos e viúvas) e z (órfãos), os novos viúvos(as) ou órfãos, resultantes de falecimentos de homens e mulheres na idade x, antes de proceder à próxima iteração.

5.5. Dados para Projeções Demográficas

O ponto de partida do procedimento de iteração para a população inicial coberta na data da avaliação devem ser os dados, subdivididos por idade e sexo, de cada subpopulação (ativos, aposentados, inválidos, viúvos/viúvas e órfãos). Para a população ativa é desejável, se isto pode melhorar a qualidade das projeções, possuir dados, subdivididos por sexo e idade, sobre o serviço passado. É possível adotar uma distribuição *ad hoc* para a população ativa em torno da média de serviço passado, se, por exemplo, a variância da distribuição puder ser estimada ou presumida.

Um problema prático concerne às variações na definição de idade. As possibilidades incluem a idade com referência ao último aniversário, a idade com base no mais próximo aniversário e a idade que será alcançada no próximo aniversário. Neste capítulo utilizaremos a definição de idade baseada no aniversário mais próximo. Essa escolha é puramente ilustrativa e não invalida qualquer outra definição mais adequada ou conveniente às circunstâncias. Os dados fornecidos de acordo com qualquer outra definição podem ser convertidos, por interpolação, para a definição adotada neste capítulo; alternativamente, a fórmula de projeção pode ser adaptada para adequar-se a definição específica de idade, contida nos dados.

Uma segunda questão refere-se ao período de referência para os dados. Geralmente uma avaliação atuarial é realizada ao término do ano financeiro do sistema de previdência. Neste capítulo assumimos que os dados relativos aos beneficiários referem-se àqueles que estão recebendo benefícios no momento da avaliação, embora os dados referentes aos ativos cobertos incluam todos aqueles que foram creditados com no mínimo uma contribuição no ano financeiro anterior à data da avaliação. Com respeito aos futuros entrantes, é normalmente difícil adotar pressupostos sobre número, sexo e idade dos mesmos. Duas variantes são consideradas:

Variante (a): (baseada no ILO-PENS, 1997): O total esperado de população ativa segurada – por sexo e idade – em anos futuros é fornecido exogenamente, isto é, deve ser baseado em projeções sobre a população nacional ou sobre a força de trabalho.

Variante (b): Indicações sobre a taxa de crescimento da população ativa segurada total em cada ano da projeção são fornecidas junto com a distribuição relativa por sexo e idade dos novos entrantes; freqüentemente, a mesma distribuição de idade e sexo é utilizada para todas as gerações de novos entrantes.

Em ambos os casos, as projeções de novos entrantes para cada ano devem ser deduzidas indiretamente. Assume-se as novas entradas como ocorrendo no meio do ano financeiro. Para manter a consistência com a definição de idade adotada neste capítulo (idade baseada no mais próximo aniversário), novos entrantes são classificados por idade baseada no mais próximo aniversário.

5.6. A Base Atuarial para Projeções Demográficas

Para efetuar projeções demográficas é necessário adotar uma base consistente de elementos listados abaixo. Eles devem ser entendidos como específicos por sexo. Por conveniência, o tempo não é indicado como variável, mas algumas ou mesmo todas as bases devem variar no tempo.

(a) A tábua de serviço ativo $\{l_x^a\}, b \le x \le r$, onde b é a mais baixa idade de entrada e r a mais alta idade de aposentadoria. Esta é uma tábua de duplo decremento, admitindo decrementos de morte e invalidez. As taxas de decremento associadas são denotadas por ${}^*q_x^a$ (mortalidade) e ${}^*i_x$ (invalidez). Assume-se que as aposentadorias ocorrem em idades integrais exatas, exatamente antes de cada aniversário; r_x denotando a proporção de aposentados na idade x;

(b) A tábua de vida para inválidos $\{l_x^i\}, b \le x < w$ e as taxas independentes de mortalidade q_x^i associadas;

(c) A tábua de vida para aposentados, $\{l_x^p\}, r^* \le x < w$ (onde r^* é a taxa de aposentadoria mais baixa), e a taxa de mortalidade independente associada q_x^p;

(d) A tábua de duplo decremento para viúvos/viúvas, $\{l_y^w\}, y^* \le y < w$ (y^* é a mais baixa idade do viúvo/viúva), e as taxas dependentes de decremento, ${}^*q_y^w$. (mortalidade) e ${}^*h_y$ (novo casamento).

(e) A tábua de decremento único para órfãos, $\{l_z^0\}, 0 \le z \le z^*$, onde z^* é a idade limite para pensões de órfãos, e a taxa de decremento independente associada q_z^0;

(f) w_x, a proporção de pessoas casadas entre aquelas falecidas na idade x;

(h) n_x , o número médio de órfãos de uma pessoa falecida na idade x;

(i) z_x , a idade média dos órfãos acima;

(j) $\rho(t)$, a taxa de crescimento do número de pessoas ativas seguradas no ano de projeção t. Isto aplica-se somente para a variante *(b)* da seção 5.5.

Com relação aos viúvos/viúvas e órfãos, devemos notar que as idades médias – correspondente a uma dada idade x da pessoa segurada – tem sido indicada. Isso não exclui a recorrência à distribuição etária de viúvos/viúvas e órfãos, de forma a melhorar a precisão da projeção (Boye, 1971; Picard, 1971). Além disso, as proporções e idades médias indicadas em *(f), (g), (h)* e *(i)* são tomadas como aplicáveis para todas as categorias de falecimentos – pessoas ativas, inválidos ou aposentados – mas podem variar por categoria.

5.7. Expressões para Probabilidades de Transição

As seguintes expressões para as probabilidades de transição específicas por idade e sexo são baseadas nas regras de adição e multiplicação de probabilidades. Elas são consistentes com as práticas internacionais (baseado em Picard, 1975).

Assume-se que cada iteração ocorre imediatamente após as aposentadorias (ocorrendo ao fim de cada ano de idade) acontecerem. Sob o pressuposto de distribuição uniforme dos decrementos em cada ano de idade, assumimos que estes, afetando pessoas ativas, aposentados e inválidos existentes – em (5.4), (5.5a), (5.7) e (5.9) – ocorrem, em média, ao fim de seis meses; consideramos os novos inválidos morrendo antes do fim do ano como morrendo ao fim de nove meses (em (5.5b)).

Ativo para ativo

$$p_x^{aa} = (1 - {}^*q_x^a - {}^*i_x)(1 - r_{x+1}) \qquad \textbf{(5.2)}$$

Ativo para aposentado

$$q_x^{ar} = (1 - {}^*q_x^a - {}^*i_x)r_{x+1} \qquad \textbf{(5.3)}$$

Ativo para inválido

$$q_x^{(ai)} = {}^{*}i_x (1 - 0,5 q_x^i) \tag{5.4}$$

Ativo para viúvo/viúva

$$q_x^{(aw)} = q_x^{(aw1)} + q_x^{(aw2)} \tag{5.5}$$

$$q_x^{(aw1)} = {}^{*}q_x^a w_{x+0,5} \left[1 - 0,5 \left({}^{*}q_{y_x}^w + {}^{*}h_{y_x} \right) \right] \tag{5.5a}$$

$$q_x^{(aw2)} = {}^{*}i_x \frac{1}{2} q_x^i w_{x+0,75} \left[1 - 0,25 \left({}^{*}q_{y_x}^w + {}^{*}h_{y_x} \right) \right] \tag{5.5b}$$

Aposentado para aposentado

$$p_x^{(rr)} = 1 - q_x^p \tag{5.6}$$

Aposentado para viúvo ou viúva

$$q_x^{(rw)} = q_x^p w_{x+0,5} \left[1 - 0,5 \left({}^{*}q_{y_x}^w + {}^{*}h_{y_x} \right) \right] \tag{5.7}$$

Inválido para inválido

$$p_x^{(ii)} = 1 - q_x^i \tag{5.8}$$

Inválido para viúvo/viúva

$$q_x^{(iw)} = q_x^i w_{x+0,5} \left[1 - 0,5 \left({}^{*}q_{y_x}^w + {}^{*}h_{y_x} \right) \right] \tag{5.9}$$

Viúvo/viúva para viúvo/viúva

$$p_x^{(ww)} = 1 - {}^*q_x^w - {}^*h_x \tag{5.10}$$

Podemos observar que a equação (5.5) tem dois componentes: (5.5a) relativo a morte de pessoas ativas seguradas no intervalo de idade $(x, x+1)$ e (5.5b) relacionado às pessoas ativas que se tornaram inválidas e morreram na idade $x+1$. Os valores de w_x correspondentes a idades fracionárias que ocorrem nas fórmulas acima podem ser obtidos por interpolação entre os valores adjacentes às idades integrais. Expressões para probabilidades de transição relativas aos órfãos, correspondentes a (5.5a), (5.5b), (5.7), (5.9) e (5.10), podem ser derivadas da mesma forma que aquelas para viúvos/viúvas.

Nota: *Com relação ao fator de sobrevivência após a transição de estado – em (5.4), (5.5a), (5.5b), (5.7) e (5.9) – estritamente falando, uma correção faz-se necessária para manter a consistência com o pressuposto da distribuição uniforme dos decrementos. Por exemplo, a fórmula (5.4) assume que a probabilidade de morte de um inválido, na idade* $x+t$ *, no intervalo fracionário* $(x+t, x+1)$ *, pode ser expressa como* $(1-t)q_x^i$ *. Isso implica, contudo, que no intervalo* $(x, x+1)$*,*

$$\frac{1}{l_{x+t}^i} = \frac{1-t}{l_x^i} + \frac{t}{l_{x+1}^i}$$

que tem a conseqüência, algo ilógico, de uma força da mortalidade decrescente no intervalo. O pressuposto linear mais lógico seria

$$l_{x+t}^i = (1-t)l_x^i + tl_{x+1}^i$$

que deveria resultar na seguinte expressão para a probabilidade de morte de um inválido, com idade $x+t$ *em* $(x+t, x+1)$ *de:*

$$\frac{(1-t)q_x^i}{1-tq_x^i}$$

Uma tal correção deve ser introduzida, se for o caso, resultando na seguinte expressão para a probabilidade de transição:

$$q_x^{(ai)} = {}^*i_x \left(1 - \frac{0,5q_x^i}{1-0,5q_x^i} \right)$$

Na prática, a expressão mais simples (5.4) deve, contudo, ser adequada. Essas observações também se aplicam às fórmulas (5.5a), (5.5b), (5.7) e (5.9).

5.8. A Fórmula da Projeção Demográfica

Partindo dos dados da população na data da avaliação $(t=0)$, fornecida como indicado na seção 5.5 acima, as probabilidades de transição são aplicadas para projeções sucessivas por sexo e idade (e preferivelmente por serviço passado, no caso da população ativa). Na projeção da população ativa, os novos entrantes do ano imediatamente precedente têm que ser incorporados antes de proceder à próxima iteração. A fórmula de projeção para a população segurada ativa é fornecida abaixo; o método de projetar a população beneficiária é ilustrado com referência aos aposentados.

Notação

- $Act(x,s,t)$ denota a população ativa com idade x *referida ao mais próximo aniversário,* com a duração fechada de serviço passado de s anos, ao tempo *t*; $b \le x < r, s \ge 0$;

- $Ac(x,t)$ denota a população ativa com idade x *referida ao mais próximo aniversário,* ao tempo *t*. A população de beneficiários correspondente será denotada por $Re(x,t)$, $In(x,t)$ e $W(x,t)$;

- *A*(*t*) representa a população ativa total no tempo *t*. A população beneficiária correspondente será denotada por *R*(*t*), *I*(*t*) e *W*(*t*).

- O número de novos entrantes na idade x *referida ao mais próximo aniversário* no ano de projeção *t*, no intervalo $(t-1,t)$, é denotado por $N(x,t)$.

Projeções para a população ativa: variante (a)

A projeção da população ativa do tempo $t-1$ ao tempo t é expressa pela equação:

$$Act(x,s,t) = Act(x-1,s-1,t-1)\,p_{x-1}^{(aa)} \tag{5.11}$$

onde $b+1 \le x < r, s \ge 1$. Assumimos que a densidade de benefícios, que é a proporção do período potencial de trabalho no intervalo de idade $(x-1,x)$ efetivamente contado para propósitos de aposentadoria – ver (f) na seção 5.11, abaixo – é igual a unidade. Mais genericamente, e aproximadamente, se *db* denota a densidade de benefícios,

$$\begin{aligned} Act(x,s,t) = {} & [db \;\; Act(x-1,s-1,t-1) + \\ & (1-db)Act(x-1,s,t-1)]\,p_{x-1}^{(aa)} \end{aligned} \tag{5.12}$$

Nesta variante, $Ac(x,t)$ é dado exogenamente. Os sobreviventes ativos, no tempo t, dos novos entrantes durante o ano $(t-1,t)$ são dados por

$$Z(x,t) = Ac(x,t) - \sum_{s>0} Act(x,s,t) - \\ (1-db)Act(x-1,0,\ t-1)\,p_{x-1}^{(aa)} \tag{5.13}$$

onde $b \leq x < r$ e a soma estende-se de $s=1$ até o limite superior de s. Note-se que o último termo em (5.13) não ocorrerá se a densidade for igual a unidade. Nesse caso, $Act(x,0,t) = Z(x,t)$. De outra forma

$$Act(x,0,t) = Z(x,t) + (1-db)Act(x-1,0,t-1)\,p_{x-1}^{(aa)} \tag{5.14}$$

Assumimos que esses novos entrantes ingressaram no meio do ano. O número efetivo de novos entrantes na idade x *referida ao mais próximo aniversário* pode ser estimado pela projeção reversa como

$$N(x,t) = \frac{Z(x,t)}{p_{x-0,5:0,5}^{(aa)}} \tag{5.15}$$

O fator no denominador é análogo a $\rho_x^{(aa)}$ mas refere-se ao intervalo de idade $(x-0,5;x)$ e possui a seguinte expressão

$$p_{x-0,5:0,5}^{(aa)} = (1-0,5({}^*q_{x-1}^{a} + {}^*i_{x-1}))(1-r_x) \tag{5.16}$$

Projeção da população ativa: variante (b)

$Act(x,s,t)$, para $b+1 \leq x < r, s \geq 1$, é projetado como na variante (a) – ver (5.11) e (5.12).

Nessa variante, a taxa de crescimento da população ativa total segurada, $\rho(t)$, é dada. O total da população ativa no tempo t é inicialmente projetado pela fórmula

$$A(t) = A(t-1)(1+\rho(t)) \tag{5.17}$$

Nessa variante, a distribuição de idade proporcional dos novos entrantes por idade *referida ao mais próximo aniversário* na data da entrada, $pr(x)$, é também dada. $Z(x,t)$ é então estimado pela fórmula

$$Z(x,t) = \frac{A(t) - \sum_y \left(\sum_{s>0} Act(y,s,t) + (1-db) Act(y-1,0,t-1) p_{y-1}^{(aa)} \right)}{\sum_y pr(y) p_{y-0,5:0,5}^{(aa)}} \times pr(x) p_{x-0,5:0,5}^{(aa)} \qquad \textbf{(5.18)}$$

Os dois somatórios no numerador incluem como índices todo intervalo etário relevante e $s \geq 1$, respectivamente. $Act(x,0,t)$ e $N(x,t)$ são então computados como na variante (a) – ver (5.14) e (5.15).

> ***Nota:*** *No desenvolvimento acima assumimos que* $Z(x,t)$ *é sempre positivo. Se forem obtidos resultados negativos para* $Z(x,t)$ *e portanto para* $N(x,t)$ *, isso deve ser interpretado como não existindo novos entrantes, mas que, por outro lado,* $|N(x,t)|$ *pessoas ativas seguradas deixaram o estado ativo. Esse caso corresponde à situação onde existe uma significante população coberta latente, possivelmente com direitos de aposentadoria postergados, não contribuindo correntemente, mas potencialmente aptos para reverterem ao estado de contribuinte. O modelo de projeção pode ser adaptado para esta situação tratando esse grupo como uma subpopulação distinta e projetando-o separadamente assumindo taxas de reentrada no estado de contribuinte. Isso, entretanto, não será levado adiante neste capítulo.*

Projeções da população beneficiária

O procedimento de projeção para as várias populações beneficiárias é ilustrado abaixo com relação aos aposentados:

(a) população aposentada na idade x no tempo *t*:

$$\begin{aligned} Re(x,t) &= Re(x-1,t-1)p_{x-1}^{(rr)} + \\ & Ac(x-1,t-1)q_{x-1}^{(ar)} + N(x,t)q_{x-0,5:0,5}^{(ar)} \end{aligned} \qquad \textbf{(5.19)}$$

onde o último fator de projeção é análogo a $q_x^{(ar)}$, mas relaciona-se ao intervalo etário $(x-0,5;x)$ e tem a expressão

$$q_{x-0,5:0,5}^{(ar)} = (1-0,5({}^*q_{x-1}^{a} + {}^*i_{x-1}))r_x \qquad \textbf{(5.20)}$$

(b) população total aposentada

$$R(t) = \sum_{x} Re(x,t) \tag{5.21}$$

onde $x \geq b$ e o somatório estende-se de $b+1$ até w.

Nota: *Temos assumido implicitamente que para todos os novos aposentados, o segundo e terceiro elementos de $Re(x,t)$ – ver (5.19) – têm direito à aposentadoria. Se uma condição de qualificação – em termos de um período mínimo de serviço passado – é aplicado, o segundo elemento deve ser analisado em seus dois componentes, isto é, expresso como*

$$\sum_{s} Act(x-1, s-1, t-1) q_{x-1}^{(ar)}$$

e somente aqueles componentes incluídos que se qualificam para a aposentadoria. Similarmente, o terceiro elemento de $Re(x,t)$, que deve ter somente meio ano ou menos de serviço, deve ser excluído das condições de qualificação, se aplicável. Esta nota é igualmente válida para as projeções de invalidez e de pensões de viúvos/viúvas.

5.9. Projeções Financeiras: Descrição Geral

Após completar as projeções demográficas – conforme descrito na seção 5.4 acima – o próximo passo é a produção de estimativas do total anual da folha de salários segurada e o montante anual total das diferentes categorias de benefícios correntes nos instantes $(t = 1, 2, ...)$ começando do valor inicial dado em $t = 0$. Esses agregados são obtidos aplicando-se o montante médio per capita apropriado a cada (salários ou benefícios, conforme seja o caso) elemento individual da projeção demográfica, somando-se em seguida todos esses valores individuais. Os montantes médios são computados ano a ano, paralelamente ao progresso das projeções demográficas correspondentes. Um montante per capita médio (de salários ou benefícios, conforme o caso) é computado para cada elemento distinto da população gerado pela projeção demográfica; se diferentes elementos são agregados na projeção demográfica – por exemplo, inválidos existentes sobrevivendo da idade x à idade $x+1$ e novos inválidos alcançando a idade $x+1$, ao mesmo tempo – um montante médio ponderado per capita deve ser computado de forma a corresponder ao elemento da população agregada.

Dois diferentes métodos serão descritos abaixo relativos a projeções de salários segurados.

Método 1: O primeiro método, que é clássico, refere-se a médias salariais relacionadas à idade e ao tempo que são projetadas, sendo consideradas a progressão para cada coorte de média salarial de acordo com uma função escala de salários relacionados à idade e levando em conta o crescimento do nível geral de salários, mas assumindo que a função escala de salários é constante. Embora os salários iniciais das coortes de novos entrantes sejam variados, este método não permite a modelagem adequada das variações no tempo da estrutura salarial com base na idade da população ativa. Não permite ainda levar em conta a distribuição salarial em cada idade.

Método 2: (baseado na ILO-DIST, 1996): Este método começa modelando uma variação no tempo da estrutura salarial média relaciona à idade, após o que computa as médias salariais relacionadas ao tempo e à idade levando em conta o crescimento da escala geral de salários. Além disso, modela a distribuição de salários por idade que aumenta a precisão das projeções financeiras.

5.10. Dados para Projeções Financeiras

Para a população ativa inicial, os dados iniciais consistem de médias salariais específicas por sexo em cada idade x, denotada por $s(x,0)$. Assume-se que os salários estão relacionados aos salários anuais em vigor na data da avaliação, isto é, o salário potencial correspondente a um trabalho de tempo integral durante um ano.

Adicionalmente, para a aplicação do método 2, faz-se necessário a distribuição salarial por idade, da população inicial. Alternativamente, uma indicação do coeficiente de variação dessa distribuição – denotado por $cv(x)$ – deve ser obtido.

Os salários devem referir-se ao salário total, ou ao salário relevante para o sistema de previdência social, isto é, ao salário sujeito a determinados piso e teto. No caso do teto, um "fator de retenção" deve ser aplicado para obter o salário relevante. Assumiremos neste capítulo que as referências são feitas ao salário total.

Para os aposentados correntes na data da avaliação, deverão ser obtidos os montantes médios anuais específicos de benefícios por sexo, idade e categoria de benefício.

Um outro dado necessário para a análise financeira é o fundo de reserva acumulado, na data da avaliação, denotado por $Fd(0)$.

5.11. Bases Atuariais para as Projeções Financeiras

As bases para as projeções financeiras devem incluir pressupostos para os elementos a seguir. Eles devem ser especificados como funções da idade ou do tempo; os elementos relacionados à idade devem ser especificados por sexo e além disso, se necessário, devem variar no tempo.

(a) Para o ***método 1:*** a função escala de salários relacionados à idade: s_x;

(b) Para o ***método 2:*** a função escala de salários relacionados à idade: $j(t)$;

(c) A taxa anual de crescimento dos salários em cada ano de projeção $\gamma(t)$;

(d) A taxa anual de indexação das aposentadorias em cada ano de projeção: $\beta(t)$;

(e) A taxa anual de retorno do investimento em cada ano de projeção: $i(t)$;

(f) A densidade de contribuição, isto é, a fração do ano durante a qual as contribuição são efetivamente realizadas, $dc(x)$;

(g) A densidade de benefícios, que é a fração do período potencial de trabalho que será efetivamente contada para fins de aposentadoria, $db(x)$ – que deverá exceder $dc(x)$ devido ao crédito de períodos não contributivos.

5.12. As Fórmulas da Projeção Financeira

Projeção das médias salariais: método 1

A fórmula básica para a projeção da média salarial de qualquer coorte, na idade x e no ano t, começando da média salarial do ano anterior, é

$$Sal(x,t) = s(x-1,t-1)\frac{s_x}{s_{x-1}}(1+\gamma(t)) \tag{5.22}$$

$s(x,t)$ que denota a média salarial da população ativa total com idade x, na definição de idade relacionada ao aniversário mais próximo, deve ser obtida tomando-se a média ponderada dos salários da coorte sobrevivente de $t-1$ e a média da coorte de novos entrantes no ano $(t-1,t)$, assumindo que estes entram na idade x, na definição de idade relacionada ao aniversário mais próximo, no meio do ano. Para o último grupo, o salário médio no fim do ano de entrada, denotado por $sn(x,t)$, é expresso como

$$sn(x,t) = s(x-0,5;\ 0)\left[\pi_1^t(1+\gamma(z))\right]\frac{s_x}{s_{x-0,5}} \qquad \textbf{(5.23)}$$

Projeção das médias salariais: método 2

A *função salário relativo*, denotada por $ss(x,0)$, que indica os níveis relativos de médias salariais vinculadas à idade em $t=0$, é estabelecida expressando a média salarial na idade x como um índice – com o valor, digamos, 1.000 para a idade mais baixa b – da forma seguinte:

$$ss(x,0) = 1000\frac{s(x,0)}{s(b,0)} \qquad \textbf{(5.24)}$$

A função salário relativo para o ano de projeção t é então computado pela fórmula

$$ss(x,t) = ss(x-1,t)\left[\frac{ss(x,0)}{ss(x-1;0)}\right]^{j(t)} \qquad \textbf{(5.25)}$$

Devemos observar que o valor do fator de ajustamento $j(t)$ maior/menor que a unidade implica uma extensão/profundidade da variação da média salarial por idade. Se $j(t)=0$, a média salarial torna-se a mesma para todas as idades.

A média salarial na idade x, no ano de projeção t é então computada pela fórmula

$$s(x,t) = ss(x,t)(1+\gamma(t))\frac{\sum_b^{r-1} s(y,t-1)Ac(y,t-1)}{\sum_b^{r-1} ss(y,t)Ac(y,t)}\frac{\sum_b^{r-1} Ac(y,t)}{\sum_b^{r-1} Ac(y,t-1)} \qquad \textbf{(5.26)}$$

onde $Ac(y, t)$ denota a população ativa projetada na idade y e no tempo t.

A folha total de salários em vigor no tempo t deve ser estimada como $\sum_x Ac(x,t)s(x,t)dc(x)$. Como mencionado na seção 5.10 acima, um "fator de retenção" deve ser aplicado se $s(x,t)$ refere-se ao total salarial e não ao salário segurado.

Projeção das distribuições de salários

Dependendo da fórmula de aposentadoria, a precisão das projeções de despesas pode ser melhorada utilizando distribuições de salários.

A distribuição de salários para qualquer idade x é considerada lognormal (ILO-DIST, 1996). Isso significa que o logaritmo natural dos salários é normalmente distribuído. Façamos y denotar o salário e $z = log_e y$. Façamos ainda, μ_x e μ_z denotar as respectivas médias e σ_y^2 e σ_z^2 as respectivas variâncias. Esses parâmetros são conectados pelas relações

$$\mu_y = e^{\mu_z + \frac{1}{2}\sigma_z^2} \tag{5.27}$$

$$\sigma_y^2 = e^{2\mu_z + \sigma_z^2}(e^{\sigma_z^2} - 1) \tag{5.28}$$

Tendo a média salarial sido projetada, $\mu_y = s(x,t)$. Se assumimos que o *coeficiente de variação* de y é invariante ao valor inicial $cv(x)$, então $\sigma_y = cv(x)s(x,t)$. Os parâmetros da distribuição de z podem então ser computados pelo inverso das fórmulas acima, da seguinte forma:

$$\mu_z = \log_e\left(\frac{\mu_y}{\sqrt{1+cv(x)^2}}\right) \tag{5.29}$$

$$\sigma_z^2 = \log_e\left(1 + cv(x)^2\right) \tag{5.30}$$

Podemos demonstrar (ver apêndice 6) que a média salarial da população entre quaisquer dois níveis de salários, digamos y_a e y_b é dada por

$$s(x,t)\frac{\Phi(w_b - \sigma_z) - \Phi(w_a - \sigma_z)}{\Phi(w_b) - \Phi(w_a)} \tag{5.31}$$

onde $\Phi(w)$ é a função de distribuição da variável normal padrão, $w_a = (log_e y_a - \mu_z)/\sigma_z$ e $w_b = (log_e y_b - \mu_z)/\sigma_z$.

Na prática, a população ativa em cada idade, $Ac(x,t)$, deve ser particionada em um número limitado de grupos de acordo com o nível salarial. Por exemplo, três grupos podem ser usados:

(a) o grupo de baixa renda (os 30% de mais baixa renda da população);

(b) o grupo de renda média (os 40% de renda média);

(c) o grupo de alta renda (os 30% de mais alta renda).

Façamos $s1(x,t)$, $s2(x,t)$ e $s3(x,t)$ denotar as respectivas médias salariais. Primeiro os valores w_1 e w_2 são determinados de forma tal que $\Phi(w_1)=0,3$ e $\Phi(w_2)=0,7$. As médias salariais serão então dadas por

$$s1(x,t)=s(x,t)\frac{\Phi(w_1-\sigma_z)}{\Phi(w_1)} \tag{5.32}$$

$$s2(x,t)=s(x,t)\frac{\Phi(w_2-\sigma_z)-\Phi(w_1-\sigma_z)}{\Phi(w_2)-\Phi(w_1)} \tag{5.33}$$

$$s3(x,t)=s(x,t)\frac{1-\Phi(w_2-\sigma_z)}{1-\Phi(w_2)} \tag{5.34}$$

Projeção de despesas futuras

Conforme explicado na seção 5.9, um montante médio per capita de benefício deve ser determinado para cada elemento distinto da população beneficiária na projeção demográfica correspondente. Um montante médio ponderado per capita de benefício é então computado para aqueles elementos que são reunidos em qualquer estágio particular do processo de projeção. Isso é ilustrado abaixo para as aposentadorias.

Façamos *b(x, t)* denotar o montante médio per capita de benefício de *Re(x, t)* aposentados na idade *x* e no tempo *t*. Podemos observar da equação (5.9) que *Re(x, t)* é constituído por amálgama de três elementos distintos. O montante de benefício per capita referente a cada elemento pode então ser determinado e uma média ponderada encontrada.

O montante per capita de benefício para o primeiro elemento pode ser determinado como:

$$b(x,t)=b(x-1,t-1)(1+\beta(t)) \tag{5.35}$$

O segundo elemento de $Re(x,t)$ é referente àqueles que estão deixando a população ativa na idade de $x-1$, um ano mais cedo, isto $Ac(x-1,t-1)$. O caso mais simples é aquele em que a distribuição do serviço não é utilizada, mas os cálculos são baseados na média do serviço passado das coortes. Façamos o tempo de serviço contributivo de $Ac(x-1,t-1)$ pessoas ser denotado por $sv(x-1,t-1)$. O tempo de serviço desse o, após um ano, pode ser projetado como

$$sv(x,t) = sv(x-1,t-1) + db(x-0,5) \tag{5.36}$$

Sob os pressupostos assumidos, as aposentadorias ocorrem ao fim de cada ano de idade. Se o benefício é baseado no salário à época da aposentadoria e aplica-se o ***método1,*** o salário de referência deve ser $Sal(x,t)$ – ver (5.22). Se, por exemplo a fórmula de aposentadoria prevê 1% do salário final por ano de serviço, o montante de benefício per capita deve ser dado por

$$\frac{sv(x,t)}{100} Sal(x,t) \tag{5.37}$$

Se o ***método 2*** é aplicado, o segundo elemento de $Re(x,t)$ deve ser entendido como sendo constituído de três subgrupos com médias salariais $s1(x,t)$, $s2(x,t)$ e $s3(x,t)$ – ver (5.32), (5.33) e (5.34). O montante de benefícios deve então ser computado para cada subgrupo, e encontrada uma média ponderada. Se, em adição, uma distribuição de serviço passado está disponível, então $Ac(x,t)$ deve ser compreendido como constituído pelos subgrupos de primeiro nível $Act(x,s,t)$ – ver (5.11) – de acordo com o serviço passado s, cada subgrupo de primeiro nível deve ser constituído por três subgrupos de segundo nível, de acordo com os níveis de salários. (Isso ignora a correlação entre níveis de salários e serviço passado, se nenhum ajustamento, mesmo *ad hoc* pode ser possível em instâncias específicas). Um montante de benefício per capita deve ser computado para cada subgrupo de segundo nível e encontrada uma média ponderada de todos subgrupos de segundo nível. Uma análise detalhada como esta não deve ser justificável no caso de uma fórmula de aposentadoria simples tal como aquela em (5.37), mas se a fórmula é mais complexa – envolvendo taxas percentuais máximas e mínimas ou taxas variantes de aquisição, ou sujeito a montantes mínimos e máximos – tal análise pode aumentar significantemente a precisão das projeções e será, portanto, justificada.

O terceiro elemento de $Re(x,t)$ corresponde às aposentadorias oriundas de novos entrantes do ano imediatamente precedente $(t-1,t)$. Esse grupo deve ter um serviço passado de metade de um ano ou menos. O salário será considerado como sendo $sn(x,t)$, sob o método 1 – ver (5.23) – e como idêntico àquele do segundo elemento sob o método 2.

Devemos entender que se as várias médias salariais projetadas referem-se ao salário total, "fatores de retenção" devem ser aplicados em cada estágio para estimar os salários segurados médios correspondentes.

5.13. Um Método Alternativo de Projeção sob Pressupostos Simplificados

Em certas circunstâncias, será suficiente produzir projeções para uma única geração de novos entrantes da qual os resultados combinados para todas as novas gerações de entrantes pode ser obtido por um processo conhecido como *junção*. Isso é então combinado com uma projeção de fundo fechado relativa à população inicial para obter as projeções requeridas de fundo aberto.

Projeções demográficas

O exercício de projeção pertinente para uma geração típica de novos entrantes deve ser relativa, sem perda de generalidade, a uma população de 100.000 novos entrantes na data de avaliação. Considere a população ativa projetada de duração z, denotada por $IA(z)$ para as projeções da população inicial e denotada por $NA(z)$ para a projeção padrão da geração de novos entrantes. Dados a taxa de crescimento da população ativa em cada ano de projeção $\rho(z)$, o número atual de novos entrantes $na(z)$ e assumindo-se que entram no meio do ano, são deduzidas duas diferentes expressões para a população ativa no fim do ano de projeção t (Picard, 1979):

$$IA(0)\prod_{z=1}^{t}(1+\rho(z)) = IA(t) + \sum_{z=1}^{t}\frac{na(z)}{100.000}NA(t-z+0,5) \qquad \textbf{(5.38)}$$

Se o período de projeção é de n anos, existirão n equações deste tipo $(t=1,2,...,n)$ que podem ser resolvidas sucessivamente para os números $na(t)$. Por exemplo, o número de novos entrantes no primeiro ano de projeção é dado por

$$na(1) = \frac{IA(0)(1+\rho(1)) - IA(1)}{NA(0,5)}100.000 \qquad \textbf{(5.39)}$$

Em (5.38), o valor de $NA(t-z+0,5)$ deve ser obtido por interpolação entre $NA(t-z)$ e $NA(t-z+1)$. Após resolver para $na(z)$, $z=1,2,...,n$, estes valores serão utilizados para derivar as projeções de beneficiários para os vários tipos de benefícios. Por exemplo, se $IR(z)$ denota o número de aposentados de duração z na projeção da população inicial e $NR(z)$ denota o número correspondente resultante da projeção padrão de 100.000 novos entrantes, o número de aposentados ao fim do *t-ésimo* ano de projeção, derivado da população inicial como também dos novos entrantes dos primeiros t anos, é dado por

$$TR(t) = IR(t) + \sum_{z=1}^{t} \frac{na(z)}{100.000} NR(t-z+0,5) \tag{5.40}$$

Em (5.40), a primeira componente do lado direito representa os aposentados oriundos da população inicial enquanto que o segundo membro representa os aposentados originários dos novos entrantes que aderiram ao sistema nos primeiros t anos, ambos ao fim do *t-ésimo* ano de projeção.

Projeções financeiras

Façamos as projeções para o total de salários da população inicial e para a geração padrão de novos entrantes denotados por $IS(t)$ e $NS(t)$ e as projeções para o total de aposentadorias por $IP(t)$ e $NP(t)$.

O total de salários segurados ao fim do *t-ésimo* ano de projeção derivado da população inicial e dos novos entrantes dos primeiros t anos é dado por

$$TS(t) = IS(t) + \sum_{z=1}^{t} \frac{na(z)}{100.000} NS(t-z+0,5) ADJ(z) \tag{5.41}$$

onde $ADJ(z)$ é um fator de ajustamento dado por

$$ADJ(z) = \frac{\prod_{r=t-z+1}^{t} (1+\gamma(r))}{\sqrt{1+\gamma(t-z+1)}} \tag{5.42}$$

Devemos notar que $ADJ(z)$ fornece a escala salarial adicional requerida para elevar $NS(t-z+0,5)$ ao nível geral de salários do fim do *t-ésimo* ano de projeção.

Sob a condição que $(1+\gamma(z))$ alcança uma taxa constante – independente de z – para $(1+\beta(z))$, uma fórmula similar pode ser usada para estimar os benefícios totais ao fim do *t-ésimo* ano de projeção, usando os mesmos fatores de ajustamento. Portanto,

$$TP(t) = IP(t) + \sum_{z=1}^{t} \frac{na(z)}{100.000} NP(t-z+0,5) ADJ(z) \quad \textbf{(5.43)}$$

Devemos notar que se condição acima não for satisfeita, em geral, não será possível aplicar uma fórmula simples tal como aquela em (5.43).

5.14. Manipulação de Projeções Financeiras para Propósitos de Avaliação

Baseados nos dados (iniciais) e nos valores projetados dos salários anuais segurados totais e do montante anual total de benefícios em vigor nos pontos do tempo $t = 0,1,2...,n$, os agregados respectivos para os anos de projeção $1,2,...,n$ deve ser obtido por método de integração numérica. Uma margem para os custos de administração deve ser adicionada para às despesas com benefícios projetadas. Façamos o montante de salários segurados projetados e o despesas total (incluindo administração) para o *t-ésimo* ano de projeção ser denotado por S_t e B_t , respectivamente, com $t = 1,2...,n$.

É comum descontar-se os agregados acima para a data de avaliação. Denotaremos os valores descontados por DS_t e DB_t . Por exemplo,

$$DS_t = \frac{S_t}{\left[\prod_{r=1}^{t-1}(1+i(r))\right]\sqrt{1+i(t)}} \quad \textbf{(5.44)}$$

Os valores descontados são então acumulados, começando com o primeiro ano, para obter os totais de salários e benefícios descontados, denotados por TDS_t e TDB_t . Por exemplo,

$$TDS_t = \sum_{r=1}^{t} DS_r \quad \textbf{(5.45)}$$

Na avaliação de sistemas previdenciários em funcionamento, o interesse principal deve ser testar a adequação do arranjo de financiamento adotado. Tipicamente, será necessário testar se a programação da taxa de contribuição C_t por n anos seguintes à avaliação conduzirá o sistema de previdência a um padrão de acumulação para o fundo de reservas que satisfará a um critério predeterminado, tal como:

(a) excede, ao fim de cada ano financeiro, uma dada proporção das despesas com benefícios daquele ano; ou

(b) satisfaz um certo padrão de crescimento (por exemplo, não tem crescimento negativo em qualquer estágio).

Para levar a cabo o teste acima, inicialmente faz-se necessário projetar o crescimento do fundo de reservas, denotado por $V(t)$, começando de um valor inicial, $Fd(0)$. Isso pode ser alcançado por repetida aplicação da seguinte fórmula recorrente para $(t = 1, \ldots, n)$:

$$V(t) = V(t-1)(1+i(t)) + \left[C_t S_t - B_t\right]\sqrt{1+i(t)} \qquad \textbf{(5.46)}$$

Quando se realiza uma avaliação atuarial inicial, precedendo a introdução de um sistema de previdência, faz-se necessário modelar métodos alternativos de financiamento. Isso também se aplica para um sistema de previdência em andamento em casos de mudanças no arranjo de financiamento do sistema. Computações são ilustradas abaixo para selecionados métodos de financiamento.

Para um sistema que utiliza o método de repartição simples, a taxa de contribuição projetada para o *t-ésimo* ano financeiro é dada por

$$\mathrm{PAYG}_t = \frac{B_t}{S_t} \qquad \textbf{(5.47)}$$

Para outros métodos de financiamento de sistemas de previdência social discutidos no capítulo 1, as fórmulas contínuas desenvolvidas naquele capítulo podem ser adaptadas para o caso discreto, substituindo as integrais

$$\int_n^m B(t)e^{-\delta t}dt \quad e \quad \int_n^m S(t)e^{-\delta t}dt$$

que aparecem nas fórmulas por $TDB_m - TDB_n$ e $TDS_m - TDS_n$ respectivamente. Além disso, as funções $B(m)e^{-\delta m}$ e $S(m)e^{-\delta m}$ que também aparecem nas fórmulas serão obtidas por interpolação entre os valores projetados para o *m-ésimo* e *m+1*-ésimo ano financeiro. O procedimento é ilustrado abaixo para selecionados métodos de financiamento. A data de avaliação é considerada como a origem no eixo do tempo.

O prêmio médio geral – ver fórmula (1.13) do capítulo 1 – pode ser computado projetando-se os valores até que o sistema alcance a sua maturidade. Suponhamos que a maturidade seja alcançada no *n-ésimo* ano de projeção. Façamos i^*, ρ^* e γ^* indicarem os valores eventuais (constantes) do retorno do investimento, o fator de crescimento de novos entrantes e o fator de crescimento salarial devido ao mérito, onde, por razões óbvias,

$$1+i^* > (1+\rho^*)(1+y^*)$$

e seja

$$v = \frac{(1+\rho^*)(1+\gamma^*)}{(1+\mathrm{i}^*)}$$

O GAP, levando em conta o fundo de reservas na data da avaliação $(t=0)$, será então dado por

$$\mathrm{GAP} = \frac{\mathrm{TDB}_{n-1} + k\mathrm{DB}_n - Fd(0)}{\mathrm{TDS}_{n-1} + k\mathrm{DS}_n} \qquad \textbf{(5.48)}$$

onde $k = 1/(1-v)$.

O prêmio comparado correspondente para um período inicial de m anos seguintes a data da avaliação $(t=0)$ – ver fórmula (1.32) do capítulo 1 – pode ser computada como

$$\pi(0,m) = \frac{\sqrt{DB_m DB_{m+1}} + \delta_m TDB_m - \delta_m Fd(0)}{\sqrt{DS_m DS_{m+1}} + \delta_m TDS_m} \qquad \textbf{(5.49)}$$

onde o método da interpolação geométrica foi usado.

δ_m pode ser aproximado por

$$\delta_m = \log_e(1+i(m)) \tag{5.50}$$

O fundo de reservas acumulado, ao fim do período, partindo da reserva inicial de $Fd(0)$ – ver fórmula (1.5) do capítulo 1 – será dado por

$$V(m) = \left[Fd(0) + \pi(0,m)TDS_m - TDB_m\right]\left[\prod_{r=1}^{m}(1+i(r))\right] \tag{5.51}$$

Uma expressão alternativa – baseada na fórmula (1.31) do capítulo 1 – é

$$V(m) = \frac{\sqrt{B_m B_{m+1}} - \pi(0,m)\sqrt{S_m S_{m+1}}}{\delta_{\mathrm{m}}} \tag{5.52}$$

A interpolação é novamente baseada no método geométrico.

As fórmulas pertinentes para os outros métodos de financiamento podem ser adaptadas similarmente, para propósitos de cálculos.

6. TÉCNICA DO VALOR PRESENTE

6.1. Introdução

Este capítulo trata da segunda das duas técnicas para a análise de sistemas de previdência mencionados anteriormente. Essa técnica considera uma coorte inteira de pessoas seguradas a cada vez e calcula o valor presente provável dos salários segurados futuros, por um lado e os benefícios de aposentadorias pagáveis aos membros da coorte e aos seus sobreviventes, por outro lado.

Essa técnica é naturalmente adequada para a avaliação de sistemas de previdência ocupacionais, que, como foi visto no capítulo 2, em geral são totalmente capitalizados. Esse não é o caso dos sistemas de previdência com capitalização parcial, para os quais a técnica apropriada de avaliação é a técnica de projeção. Apesar disso, a técnica do valor presente pode fornecer detalhes financeiros adicionais e ser, portanto, útil ao ser utilizada conjuntamente com a técnica de projeção. A técnica do valor presente já foi introduzida no capítulo 2, embora em sua forma contínua e referente apenas a aposentadorias. A equação 2.2 de fato representa a taxa de contribuição $K(b)$, resultante da igualdade, para uma coorte entrando na idade b e aposentando-se na idade r, de $K(b)$ vezes o valor presente provável dos salários futuros e o valor presente provável dos benefícios de aposentadorias futuras.

A seguir, desenvolveremos aproximações discretas para as funções comutacionais contínuas de forma a permitir a aplicação prática da teoria. O tratamento será estendido para benefícios de invalidez e pensão por morte. As referências serão feitas às mesmas bases demográficas e financeiras utilizadas na explanação da técnica de projeção, detalhada nas seções 5.6 e 5.11 do capítulo 5. Além disso, certas simplificações nas bases de dados serão adotadas. Primeiro, a variação no tempo das bases econômicas não serão consideradas. Portanto, $\gamma^*(t)$, $\beta^*(t)$ e $i^*(t)$ serão consideradas constantes e as taxas de juros i e j e seus fatores de desconto correspondentes serão introduzidos onde

$$i = \frac{1+i^*}{1+\gamma^*} - 1; \;\; v = \frac{1}{1+i} \tag{6.1}$$

$$j = \frac{1+i^*}{1+\beta^*} - 1; \;\; u = \frac{1}{1+j} \tag{6.2}$$

Segundo, os fatores de densidade dc e db serão considerados iguais à unidade para todas as idades. Finalmente, apenas uma idade de aposentadoria r será modelada, sendo b a mais baixa idade de entrada.

A fórmula do valor presente será desenvolvida para um caso simples onde a aposentadoria (por tempo de contribuição ou invalidez) é obtida à razão de 1% do salário final, por ano de trabalho. Para um tratamento mais geral, o leitor deve consultar um livro texto em previdência ocupacional (por exemplo, Lee, 1986).

A pensão do cônjuge sobrevivente será denotada por uma proporção RWP do benefício de aposentadoria atual ou potencial do falecido, e a pensão de cada órfão por uma proporção ROP do benefício de aposentadoria do falecido.

6.2. Funções Comutacionais Especiais

Uma série de funções comutacionais especiais (específicas por sexo e idade) são necessárias para a aplicação da técnica do valor presente. Essas funções são baseadas em uma ou outra das tabelas decrementais mencionadas na seção 5.6, ou ainda em uma combinação qualquer destas. As funções baseadas nas tábuas de serviço ativo serão computadas à taxa de juros i, enquanto que aquelas baseadas nas demais tábuas serão computadas à taxa j.

Funções baseadas na tábua de serviço ativo $(b \leq x \leq r)$

$$D_x^a = l_x^a v^x \tag{6.3}$$

$$D_x^{as} = s_x D_x^a \tag{6.4}$$

$$\bar{D}_x^{as} = \frac{D_x^{as} + D_{x+1}^{as}}{2} \tag{6.5}$$

$$\bar{N}_x^{as} = \sum_{t=x}^{r-1} \bar{D}_t^{as} \tag{6.6}$$

Funções baseadas na tábua de vida para inválidos $(b \le x < w)$

$$D_x^i = l_x^i u^x \tag{6.7}$$

$$\bar{D}_x^i = \frac{D_x^i + D_{x+1}^i}{2} \tag{6.8}$$

$$\bar{N}_x^i = \sum_{t=x}^{w} \bar{D}_t^i \tag{6.9}$$

$$\bar{a}_x^i = \frac{\bar{N}_x^i}{D_x^i} \tag{6.10}$$

Funções baseadas nas tábuas de duplo decremento para viúvos/viúvas $(y^* \le y < w)$

$$D_y^w = l_y^w u^y \tag{6.11}$$

$$\bar{D}_y^w = \frac{D_y^w + D_{y+1}^w}{2} \tag{6.12}$$

$$\bar{N}_y^w = \sum_{t=y}^{w} \bar{D}_y^w \tag{6.13}$$

$$\bar{a}_y^w = \frac{\bar{N}_y^w}{D_y^w} \tag{6.14}$$

Funções baseadas na tábua de serviço ativo e na tábua de vida para inválidos $(b \le x < r)$

$$C_x^{ai} = D_x^a * i_x v^{0,5} \bar{a}_{x+0,5}^i \tag{6.15}$$

$$C_x^{ais} = s_{x+0,5} C_x^{ai} \tag{6.16}$$

Funções baseadas na tábua de serviço ativo e na tábua de decrementos para viúvos/viúvas $(b \le x < r)$

$$G_{x(y)} = \frac{w_x \bar{a}^w_{y_x} + w_{x+1} \bar{a}^w_{y_{x+1}}}{2} \quad \textbf{(6.17)}$$

$$C^{aw}_x = D^a_x * q^a_x v^{0,5} G_{x(y)} \quad \textbf{(6.18)}$$

$$C^{aws}_x = s_{x+0,5} C^{aw}_x \quad \textbf{(6.19)}$$

Funções baseadas na tábua de serviço ativo, na tábua de vida para inválidos e na tábua de duplos decrementos para viúvos/viúvas $(b \le x < r)$

$$A_{x(y)} = \frac{\sum_{t=x}^{w} D^i_t q^i_t u^{0,5} G_{t(y)}}{D^i_x} \quad \textbf{(6.20)}$$

$$C^{iw}_x = D^a_x * i_x v^{0,5} A_{x+0,5(y)} \quad \textbf{(6.21)}$$

$$C^{iws}_x = s_{x+0,5} C^{iw}_x \quad \textbf{(6.22)}$$

Funções baseadas na tábua de vida para aposentados $(r \le x < w)$

$$D^p_x = l^p_x u^x \quad \textbf{(6.23)}$$

$$\bar{N}^p_x = \frac{\sum_{t=x}^{w} (D^p_t + D^p_{t+1})}{2} \quad \textbf{(6.24)}$$

$$\bar{a}^p_x = \frac{\bar{N}^p_x}{D^p_x} \quad \textbf{(6.25)}$$

N*ota:* *As funções comutacionais e anuidades acima referem-se a salários e benefícios pagáveis continuamente, e devem ser ajustadas para pagamentos efetuados com uma determinada freqüência, por exemplo, semanalmente. Elas podem ser ajustadas para corresponder mais exatamente a* *qualquer programação de pagamentos. Por exemplo, se os benefícios são pagáveis mensalmente e em obrigações, (6.10) pode ser substituído por (ver apêndice 1)*

$$a_x^{i(12)} = a_x^i + \frac{11}{24} = \frac{N_{x+1}^i}{D_x^i} + \frac{11}{24}$$

com expressões similares em (6.14) e (6.25).

6.3. Expressões para Valores Presentes Prováveis de Salários Segurados e Benefícios

As expressões a seguir relacionam-se a uma coorte específica por sexo e idade x na data da avaliação e refere-se a uma unidade de salário segurado naquela data. As expressões para órfãos não são indicadas mas podem ser derivadas de forma semelhante àquelas referentes a viúvos/viúvas.

Valor presente de salários segurados $(b \leq x < r)$

$$\mathrm{PVS}(x) = \frac{\bar{N}_x^{as} - \bar{N}_r^{as}}{D_x^{as}} \qquad \textbf{(6.26)}$$

Valor presente das aposentadorias

$$\mathrm{PVR}(x) = p(r,x)\frac{D_r^{as}}{D_x^{as}}\bar{a}_r^{p} \qquad \textbf{(6.27)}$$

onde $p(r,x)$ denota a aposentadoria da coorte na idade x como uma proporção do salário final.

Valor presente de aposentadorias por invalidez $(b \leq x < r)$

$$\mathrm{PVI}(x) = \frac{\sum_{t=x}^{r-1} p(t,x)C_t^{ais}}{D_x^{as}} \qquad \textbf{(6.28)}$$

onde $p(t,x)$ denota a aposentadoria por invalidez como uma proporção do salário, para um entrante na idade x, se a invalidez ocorre na idade $(t,t+1)$

Valor presente das pensões de viúvos/viúvas (morte em serviço) $(b \leq x < r)$

$$\mathrm{PVW1}(x) = \mathrm{RWP}\frac{\sum_{t=x}^{r-1} p(t,x)C_t^{aws}}{D_x^{as}} \tag{6.29}$$

Valor presente das pensões de viúvos/viúvas (morte após invalidez) $(b \leq x < r)$

$$\mathrm{PVW2}(x) = \mathrm{RWP}\frac{\sum_{t=x}^{r-1} p(t,x)C_t^{iws}}{D_x^{as}} \tag{6.30}$$

Valor presente das pensões de viúvos/viúvas (morte após aposentadoria)

$$\mathrm{PVW3}(x) = \mathrm{RWP}p(r,x)\frac{D_r^{as}}{D_x^{as}}\frac{\sum_{t=r}^{w} D_t^p q_t^p u^{0,5} G_{t(y)}}{D_r^p} \tag{6.31}$$

6.4. Maior Desenvolvimento das Expressões para uma Fórmula Simples de Cálculo de Aposentadoria

As expressões acima, particularmente (6.28) até (6.30), podem ser mais desenvolvidas para uma fórmula de aposentadoria específica. Isso é ilustrado abaixo para uma fórmula simples de aposentadoria obtida à razão de 1% do salário final, por ano de serviço. Se $ps(x)$ denota o serviço passado na data da avaliação,

$$p(r,x) = \frac{ps(x)+r-x}{100} \qquad e \qquad p(t,x) = \frac{ps(x)+t-x+0,5}{100}$$

$$\mathrm{PVI}(x) = \frac{R_{x+1}^{ais} + (ps(x)+0,5)M_x^{ais}}{100D_x^{as}} \tag{6.32}$$

onde

$$M_x^{ais} = \sum_{t=x}^{r-1} C_t^{ais} \tag{6.33}$$

$$R_x^{ais} = \sum_{t=x}^{r-1} M_t^{ais} \tag{6.34}$$

$$\mathrm{PVW1}(x) = \mathrm{RWP}\,\frac{R_{x+1}^{aws} + (ps(x) + 0,5)M_x^{aws}}{100D_x^{as}} \tag{6.35}$$

onde

$$M_x^{aws} = \sum_{t=x}^{r-1} C_t^{aws} \tag{6.36}$$

$$R_x^{aws} = \sum_{t=x}^{r-1} M_t^{aws} \tag{6.37}$$

$$\mathrm{PVW2}(x) = \mathrm{RWP}\,\frac{R_{x+1}^{iws} + (ps(x) + 0,5)M_x^{iws}}{100D_x^{as}} \tag{6.38}$$

onde

$$M_x^{iws} = \sum_{t=x}^{r-1} C_t^{iws} \tag{6.39}$$

$$R_x^{iws} = \sum_{t=x}^{r-1} M_t^{iws} \tag{6.40}$$

6.5. Cálculo dos Prêmios Médios

A aplicação do método do valor presente é ilustrada nesta seção através do cálculo dos prêmios médios AP1 e AP2, para a população inicial e para os novos entrantes, respectivamente. Além disso, também é calculado o prêmio geral médio, GAP, para um novo sistema de previdência. Por simplicidade consideraremos apenas um dos sexos; é claro que na prática os resultados para os dois sexos devem ser obtidos.

Façamos $Ac(x,0)$ denotar a população inicial na idade x na data da avaliação e $s(x,0)$ o salário segurado médio desta população. Façamos *pr(x)* denotar a proporção de novos entrantes ingressando na idade x – assumindo-se que é a mesma para todas as gerações de novos entrantes; façamos $na(t)$ denotar o número de novos entrantes no *t-ésimo* ano $(t-1,t)$, assumindo que estes ingressam no meio do ano; e façamos *sn(x)* denotar o salário segurado médio de uma geração padrão de novos entrantes ingressando na data da avaliação. Façamos os valores presentes prováveis – correspondentes a unidade de salário inicial – dos salários e o total das aposentadorias (todas as categorias combinadas) relacionados à população inicial serem denotados por $\mathrm{PVS1}(x)$ e $\mathrm{PVB1}(x)$, e as quantidades correspondentes à geração padrão de novos entrantes serem denotadas por $\mathrm{PVS2}(x)$ e $\mathrm{PVB2}(x)$. O prêmio médio para a população inicial e para os novos entrantes serão então dados por

$$\mathrm{AP1} = \frac{\sum_{x=b}^{r-1} Ac(x,0)s(x,0)\mathrm{PVB1}(x)}{\sum_{x=b}^{r-1} Ac(x,0)s(x,0)\mathrm{PVS1}(x)} \tag{6.41}$$

$$\mathrm{AP2} = \frac{\sum_{x=b}^{r-1} pr(x)sn(x)\mathrm{PVB2}(x)}{\sum_{x=b}^{r-1} pr(x)sn(x)\mathrm{PVS2}(x)} \tag{6.42}$$

Se as expressões acima forem abreviadas como

$$\mathrm{AP1=P1/Q1} \quad e \quad \mathrm{AP2=P2/Q2}$$

o prêmio médio geral será dado por

$$\mathrm{GAP} = \frac{\mathrm{P1} + k\mathrm{P2}}{\mathrm{Q1} + k\mathrm{Q2}} \tag{6.43}$$

onde k é dado por

$$k = \sum_{t=1}^{\infty} na(t) v^{t-0,5} \tag{6.44}$$

e $v = 1/(1+i)$ – ver seção 6.1, acima. A expressão para k pode ser simplificada se $na(t)$ segue uma lei simples. Por exemplo, se $na(t) = na(1)(1+f)^{t-1}$ então a expressão convergirá, uma vez que $1+f < 1+i$, para

$$k = na(1)\frac{(1+i)^{0,5}}{(i-f)} \tag{6.45}$$

A condição acima para convergência não é outra senão a bem conhecida condição de que a taxa de juros deve exceder a soma da taxa de crescimento do número de novos entrantes mais a taxa de crescimento dos salários devido ao mérito.

APÊNDICE 1

MATEMÁTICA ATUARIAL BÁSICA

Este apêndice fornece um breve sumário dos principais elementos da matemática atuarial básica. Pretende-se que este seja principalmente uma fonte de referência rápida. Para maiores detalhes, deve o leitor consultar livros textos padrões sobre atuária básica (por exemplo, Hooker & Longley-Cook, 1953; Jordan, 1967; Neill, 1986).

1. Juros compostos

A taxa de *juros* pode ser entendida como uma retribuição paga pelo *tomador* pelo uso de um ativo, referido como *capital* ou *principal*, pertencente ao *emprestador*. Assumimos que ambos, capital e juros, são medidos em unidades de uma dada moeda.

Os juros podem ser simples ou compostos. Se um capital de C unidades é emprestado a uma taxa de *juros simples* de i por cento ao ano por n anos, a soma acumulada ao fim do período será dada por

$$\mathrm{AS}=C(1+ni) \tag{A1.1}$$

Se, por outro lado, o valor é emprestado a uma taxa de *juros compostos*, a soma acumulada ao fim do período será dada por

$$\mathrm{AS}=C(1+i)^n \tag{A1.2}$$

O conceito de juros compostos fundamenta a análise e avaliação de investimentos. Neste apêndice nos referiremos sempre a juros compostos.

A definição acima de juros compostos é baseada em períodos anuais de tempo. Teoricamente, no entanto, é possível conceber uma *força dos juros* δ, equivalente, em termos contínuos. A relação entre δ e i pode ser expressa da seguinte forma

$$\delta=\log_e(1+i);\ e^{\delta}=1+i \tag{A1.3}$$

O símbolo v é freqüentemente utilizado para denotar o recíproco de $1 + i$, portanto

$$v = \frac{1}{1+i} = e^{-\delta} \tag{A1.4}$$

Um conceito importante é o de *valor presente* de uma soma acumulada durante n anos. Isso refere-se ao capital que, se emprestado (ou investido) anualmente à taxa de juros de i, somará ao final do *n-ésimo* ano, digamos K. Esse valor é dado por

$$\text{PV} = K(1+i)^{-n} = Kv^n = Ke^{-n\delta} \tag{A1.5}$$

Quando o recebimento da soma acumulada K está sujeito à probabilidade p, seu valor presente é chamado de valor presente provável e é dado por

$$\text{PPV} = pKe^{-n\delta} \tag{A1.6}$$

A palavra "provável" é algumas vezes omitida, quando é evidente no contexto.

2. Anuidades financeiras

Se uma unidade monetária é paga no início de cada ano, por n anos, esta série de pagamentos é denominada de *anuidade devida*.

O valor presente da anuidade devida é a soma dos valores presentes dos pagamentos individuais. Essa anuidade possui o símbolo e a expressão seguintes:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + v + v^2 + \ldots + v^{n-1} = \frac{1-v^n}{1-v} \tag{A1.7}$$

Se os pagamentos anuais são realizados no final de cada ano, a anuidade é chamada de *anuidade imediata*. Essa anuidade possui o seguinte símbolo e está relacionada à anuidade devida da forma abaixo indicada:

$$a_{\overline{n}|} = v\ddot{a}_{\overline{n}|} \tag{A1.8}$$

O valor acumulado de uma anuidade é a soma dos valores acumulados dos pagamentos individuais. Por exemplo, o valor acumulado de uma anuidade imediata tem os seguintes símbolo e expressão:

$$s_{\overline{n}|} = (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \ldots + (1+i) + 1 = (1+i)^n a_{\overline{n}|} \qquad \textbf{(A1.9)}$$

Mais genericamente, uma anuidade pode ser pagável em m prestações distribuídas equilibradamente no ano. Dependendo de como os pagamentos são realizados, se ao final ou no início de cada período fracional, essa anuidade é simbolizada e avaliada como se segue:

$$a_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{i}{i^{(m)}} a_{\overline{n}|} \qquad \textbf{(A1.10)}$$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)} = a_{\overline{n}|}^{(m)} + \frac{i}{m} a_{\overline{n}|} \qquad \textbf{(A1.11)}$$

onde

$$i^{(m)} = m\left[(1+i)^{1/m} - 1\right] \qquad \textbf{(A1.12)}$$

Para fins teóricos, é possível conceber uma *anuidade contínua*, onde o montante é investido continuamente durante o ano. Os valores presente e acumulado correspondentes têm os seguintes símbolos e expressões:

$$\bar{a}_{\overline{n}|} = \frac{1-e^{-\delta n}}{\delta}; \quad \bar{s}_{\overline{n}|} = \frac{e^{\delta n}-1}{\delta} \qquad \textbf{(A1.13)}$$

3. A tábua de vida

A tábua de vida, também conhecida como tábua de mortalidade, é um dispositivo para exibir dados sobre mortalidade da vida humana. Ela é representada pela função $\{l_x\}$, que indica os sobreviventes para cada idade integral x, de um total inicial hipotético de 100.000 novos nascimentos. Dizemos que essa tábua está sujeita a um *decremento simples*, isto é, a morte. O intervalo de variação de x é $(0, w)$, onde w representa o limite da vida. Uma função auxiliar é d_x , que indica o número de vidas eliminadas por morte entre as idades x e $x+1$. Essa função é dada pela seguinte expressão:

$$d_x = l_x - l_{x+1} \tag{A1.14}$$

A *taxa de mortalidade central* na idade $x(m_x)$ e a taxa de mortalidade da tábua de vida (q_x) , esta última representando a probabilidade de uma pessoa com idade x morrer dentro de um ano, são dadas por

$$m_x = \frac{2d_x}{l_x + l_{x+1}}; \; q_x = \frac{d_x}{l_x} = \frac{2m_x}{2+m_x} \tag{A1.15}$$

O complemento da taxa de mortalidade da tábua de vida, representando a probabilidade de uma pessoa com idade x sobreviver até a idade $x+1$, é indicado pelo símbolo p_x e é dado pela relação

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} = 1 - q_x \tag{A1.16}$$

Para fins teóricos, é costume assumir que l_x é uma função contínua de x. A *força* da mortalidade em uma idade qualquer x (não necessariamente integral), indicada por μ_x , é dada por

$$\mu_x = -\frac{1}{l_x}\frac{dl_x}{dx} \tag{A1.17}$$

A força da mortalidade na idade $x+0,5$ é aproximadamente dada por

$$\mu_{x+0,5} = \frac{q_x}{1-0,5q_x} \tag{A1.18}$$

A *expectativa de vida* na idade x mede o tempo de vida médio futuro para aquela idade. A expectativa *"curtate"*, denotada por e_x , representa o número médio de anos completos vividos além da idade x, enquanto que a expectativa *completa*, denotada por e_x^0 ,representa a média exata de tempo de vida futura. Elas são dadas pelas seguintes fórmulas:

$$e_x = \frac{(l_{x+1} + l_{x+2} + \ldots)}{l_x} \tag{A1.19}$$

$$e_x^0 = \frac{1}{l_x} \int_x^w l_y dy \tag{A1.20}$$

A expectativa completa é aproximadamente dada por

$$e_x^0 = e_x + 0,5 \tag{A1.21}$$

4. Funções comutacionais elementares

As funções comutacionais são obtidas pela combinação de funções de tábuas de vida com funções de juros. Elas são usadas para calcular anuidades vitalícias e funções de seguro e são discutidas na seção 5 abaixo.

Funções comutacionais de primeiro nível, D_x e C_x são definidas da forma seguinte $(0 \leq x < w)$:

$$D_x = l_x v^x;\ C_x = d_x v^{x+1} \tag{A1.22}$$

Funções comutacionais de segundo nível, N_x e M_x são obtidas somando as funções de primeiro nível correspondentes, conforme segue:

$$N_x = \sum_{y=x}^{w} D_y;\ M_x = \sum_{y=x}^{w} C_y \tag{A1.23}$$

Funções comutacionais de nível 3, denotadas por S_x e R_x, são obtidas por somas similares das funções de segundo nível, e assim por diante.

Existem também outras funções comutacionais usadas pela teoria ou pelas técnicas de avaliação de benefícios de aposentadoria. Essas são introduzidas e definidas nos capítulos 2, 3 e 6.

5. Anuidades vitalícias e seguros

Uma série de pagamentos de uma unidade no início de cada ano, pagável a uma pessoa com idade x durante toda a sua vida é chamada de *anuidade vitalícia devida*. O valor presente provável dessa anuidade tem o seguinte símbolo e pode ser expressa em termos de funções comutacionais elementares da seguinte forma:

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x} \qquad \textbf{(A1.24)}$$

Se os pagamentos são realizados ao fim de cada ano, a anuidade é chamada de *anuidade vitalícia imediata*. É denotada pelo símbolo a_x e tem a seguinte expressão:

$$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x} \qquad \textbf{(A1.25)}$$

Uma anuidade vitalícia, devida ou imediata, pode ser pagável em m períodos uniformemente distribuídos ao longo do ano. Esse tipo de anuidade possui os seguintes símbolos e as expressões aproximadas

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m} \qquad \textbf{(A1.26)}$$

$$a_x^{(m)} = a_x - \frac{m-1}{2m} \qquad \textbf{(A1.27)}$$

Uma anuidade vitalícia contínua é aquela em que uma unidade por ano é paga continuamente durante todo o ano. Seu valor presente provável é denotado como se segue e tem a seguinte expressão:

$$\bar{a}_x = \frac{\bar{N}_x}{D_x} \qquad \textbf{(A1.28)}$$

onde

$$\bar{N}_x = \frac{N_x + N_{x+1}}{2}$$

Se a duração da anuidade vitalícia é limitada a n anos, ela é chamada anuidade vitalícia temporária. Por exemplo, um anuidade vitalícia devida temporária é denotada pelo seguinte símbolo e tem a expressão

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} \tag{A1.29}$$

Similarmente,

$$a_{x:\overline{n}|} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} \tag{A1.30}$$

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{\bar{N}_x - \bar{N}_{x+n}}{D_x} \tag{A1.31}$$

Além disso,

$$a^{(m)}_{x:\overline{n}|} = a_{x:\overline{n}|} + \frac{m-1}{2m}\left[1 - \frac{D_{x+n}}{Dx}\right] \tag{A1.32}$$

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{m-1}{2m}\left[1 - \frac{D_{x+n}}{Dx}\right] \tag{A1.33}$$

Uma *anuidade vitalícia conjunta* é aquela em que os pagamentos ocorrem enquanto dois indivíduos em idades x e y permanecem ambos vivos. Se ela é pagável ao fim de cada ano, possuirá os seguintes símbolo e expressão:

$$a_{xy} = \sum_t \frac{l_{x+t}}{l_x}\frac{l_{y+t}}{l_y} v^t \tag{A1.34}$$

onde t se estende de 1 até o final do período de pagamento. Uma anuidade pagável a um indivíduo com idade y após a morte de um outro indivíduo com idade x é chamada de *anuidade de último sobrevivente* e tem o símbolo e expressão

$$a_{x/y} = a_y - a_{xy} \tag{A1.35}$$

Se um montante único é pagável ao fim do ano no qual um indivíduo de idade x perece, este é chamado de *seguro de vida total*. O valor presente provável do seguro é denotado por A_x e é dado por

$$A_x = \frac{M_x}{D_x} \quad \textbf{(A1.36)}$$

Um *seguro doação* é dado pela expressão

$$A_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} + \frac{D_{x+n}}{D_x} \quad \textbf{(A1.37)}$$

Nesse caso, o montante segurado é pago ao fim do ano em que ocorre a morte, se esta ocorre dentro de um período de n anos, ou ao sobrevivente ao fim do período. Um seguro doação é entendido como uma soma de um *seguro temporário* (ou *de duração definida*) e uma *doação pura*. Se a soma segurada é pagável imediatamente em caso de morte, M_x na expressão acima deve ser substituído por

$$\bar{M}_x = \frac{M_x + M_{x+1}}{2} \quad \textbf{(A1.38)}$$

e de forma similar por M_{x+n}

6. A tábua de múltiplos decrementos

Uma *tábua de múltiplos decrementos* é similar a uma tábua de vida, exceto que nesta existe mais que um decremento a ser considerado.

Uma distinção deve ser feita entre taxas de decremento *dependentes* e *independentes*. As taxas independentes aplicam-se quando um decremento age sozinho, enquanto que a taxa dependente refere-se ao caso em que o dado decremento age concorrentemente com outros decrementos. O caso de uma tábua sujeita a *duplo decremento* α *e* β é discutido abaixo e em seguida generalizado para três decrementos.

Façamos l_x representar o número de sobreviventes em idade x na tábua de duplo decremento, ${}^*\alpha_x$ *e* ${}^*\beta_x$ as taxas dependentes correspondentes aos decrementos, e α_x e β_x as taxas independentes correspondentes. Então, as taxas dependentes podem ser expressas em termos de taxas independentes, da seguinte forma:

$$ {}^{*}\alpha_x = \alpha_x\left(1 - \beta_x/2\right); \quad {}^{*}\beta_x = \beta_x\left(1 - \alpha_x/2\right) \qquad \textbf{(A1.39)} $$

Se as taxas independentes são fornecidas, as taxas dependentes podem ser calculadas usando as fórmulas acima. A função da tábua de duplo decremento l_x e as funções auxiliares d_x^{α} e d_x^{β}, indicando o número de saídas devido às causas α e β, respectivamente, entre as idades x e $x+1$, pode ser estabelecida partindo-se de um número hipotético, digamos 100.000 à mais baixa idade b, utilizando as seguintes fórmulas sucessivamente:

$$ d_x^{\alpha} = l_x\,{}^{*}\alpha_x; \; d_x^{\beta} = l_x\,{}^{*}\beta_x; \; l_{x+1} = l_x - d_x^{\alpha} - d_x^{\beta} \qquad \textbf{(A1.40)} $$

Estará claro também que

$$ l_{x+1} = l_x\left(1 - {}^{*}\alpha_x - {}^{*}\beta_x\right) = l_x\left(1-\alpha_x\right)\left(1-\beta_x\right) \qquad \textbf{(A1.41)} $$

As fórmulas acima expressam taxas dependentes em termos de taxas independentes, e podem ser generalizadas para três decrementos α, β e γ, da seguinte forma:

$$ {}^{*}\alpha_x = \alpha_x\left(1 - \frac{\left(\beta_x + \gamma_x\right)}{2} + \frac{\beta_x\gamma_x}{3}\right) \qquad \textbf{(A1.42)} $$

Com expressões similares para ${}^{*}\beta_x$ e ${}^{*}\gamma_x$

Além disso,

$$ l_{x+1} = l_x\left(1 - {}^{*}\alpha_x - {}^{*}\beta_x - {}^{*}\gamma_x\right) = l_x\left(1-\alpha_x\right)\left(1-\beta_x\right)\left(1-\gamma_x\right) \quad \textbf{(A1.43)} $$

A extensão da teoria dos múltiplos decrementos para maior número de decrementos pode ser efetuada de forma semelhante.

A tábua de serviço ativo é um exemplo de tábua de múltiplos decrementos. Ela indica o progresso, de acordo com a idade, de uma coorte de pessoas cobertas por um sistema de previdência, por todo o intervalo de idade, desde a idade de entrada (b) até a idade de aposentadoria (r). A tábua de serviço ativo para um sistema de seguridade social normalmente permite dois decrementos: (a) morte e (b) invalidez. Mesmo que a aposentadoria possa ocorrer em qualquer momento do intervalo de idades, ainda assim será possível trabalhar com tábuas de duplo decremento se assumirmos que as aposentadorias ocorrem em idades integrais; de outra forma será necessário adotar uma tábua de triplo decremento.

A tábua de serviço ativo é representada pela função $\{l_x^a\}, b \leq x \leq r$, onde l_x^a significa o número de pessoas que continuam no status de ativo segurado na idade x, de um número inicial hipotético de, digamos, 100.000 entrantes no sistema na idade b. Essa tábua pode ser construída para qualquer sistema de previdência dado, adotando os pressupostos apropriados para as taxas de mortalidade (q_x) e invalidez (i_x), e se necessário, de aposentadoria (r_x). As fórmulas apropriadas a serem usadas na construção da tábua dependerão se os pressupostos relacionam-se às taxas dependentes ou independentes.

APÊNDICE 2

ILUSTRAÇÕES NUMÉRICAS

1. Um sistema de previdência hipotético

Para ilustrar os vários métodos de financiamento discutidos nos capítulos 1 e 2, adotamos um sistema de previdência simples hipotético. Apenas benefícios de aposentadorias são considerados, pagáveis por toda a vida a partir da idade de 65 anos. A fórmula de cálculo da aposentadoria é 1% do salário final por ano de serviço contributivo. Pessoas com idade acima de 65 anos no início do sistema não têm direito ao benefício.

O diagrama de Lexis (figura 1) possibilita a visualização dos componentes do sistema de previdência e sua evolução no tempo.

2. A população segurada inicial

A população segurada inicial totaliza 10.000 pessoas, distribuídas por idade, conforme apresentado na segunda coluna da tabela 1. Essa população será utilizada para demonstração das projeções e dos métodos de financiamento, nas tabelas 3, 4 e 5. (a distribuição na terceira coluna será utilizada unicamente pela tabela 7 – ver seção 7 abaixo). A distribuição na segunda coluna é uma distribuição de idades estável, resultante dos pressupostos demográficos – ver seção 3, abaixo. A tabela 1 também mostra a média salarial anual, no início do sistema, da população inicial e o tempo de serviço passado desta população.

3. Pressupostos demográficos

Assumimos que a força intrínseca de crescimento da população segurada (ρ) é igual a 1%, e que os novos entrantes ingressam no sistema na idade de 20 anos. Assumimos também que as taxas de decremento da população segurada são constantes, e o único decremento considerado é a mortalidade. A tabela 2 mostra a tábua de serviço para as pessoas ativas seguradas e a tábua de vida para aposentados, correspondente às taxas de decremento assumidas.

Para simplificar os cálculos, consideramos que a força de crescimento demográfico, taxas de decremento e idade de entrada têm sido as mesmas no passado e por um longo tempo, tendo como conseqüência que a distribuição etária da população segurada apresenta-se estável no momento do início de funcionamento do sistema de previdência – ver seção 2, acima.

4. Pressupostos econômicos

A progressão relativa com o avanço da idade do salário segurado de um membro individual (escala de salários) é também apresentada na tabela 2. Em adição, consideramos a força do crescimento do nível geral de salários (γ) e a força de indexação das aposentadorias (β) , ambas ao nível de 3%. Assumimos ainda que a força dos juros (δ) é de 6%.

5. Projeções demográficas e financeiras

As projeções demográficas e financeiras podem ser efetuadas através de duas variantes:

- variante 1: tempo de serviço passado não é reconhecido
- variante 2: tempo de serviço passado é totalmente reconhecido

Assumimos que o fator densidade é de 100% e que as despesas administrativas são ignoradas. Os resultados são apresentados na tabela 3. Para ambas as variantes a maturidade demográfica é alcançada em 35 anos. A maturidade financeira é alcançada em 35 anos para a variante 2 e em 80 anos para a variante 1. As projeções financeiras são ilustradas na figura 2.

6. Demonstração dos métodos de financiamento

Os resultados dos cálculos para a variante 1 são fornecidos na tabela 4 e aqueles para a variante 2 na tabela 5. As tabelas mostram as alíquotas de contribuição em relação ao tempo e às reservas a intervalos de 10 anos. As reservas são apresentadas em unidades monetárias e como um múltiplo da folha de salários correspondente.

O método do prêmio escalonado é demonstrado apenas para a variante 1. Métodos de financiamento para sistemas de previdência ocupacional são considerados apenas para a variante 2. Assumimos que o passivo inicial será amortizado em pagamentos uniformes anuais durante período equivalente à vida ativa do mais jovem entrante inicial.

Os resultados acima são ilustrados nas figuras de 3 a 8 e de 11 a 14.

A tábua 6 apresenta as funções alíquota de contribuição e reservas relacionadas à idade para os métodos de custo atuarial individuais discutidos no capítulo 2. Esses resultados são ilustrados nas figuras 9 e 10.

7. Sensibilidade dos prêmios às variações paramétricas

A sensibilidade de prêmios selecionados às mudanças em determinados parâmetros é ilustrada na tabela 7. Esses resultados correspondem à variante 2 (reconhecimento total do tempo de serviço passado).

Para demostrar o efeito da variação da força do crescimento demográfico, e para o propósito dessa tabela, consideramos a distribuição etária da população inicial como independente das forças de crescimento demográfico simuladas. Essa distribuição mostrada na terceira coluna da tabela 1 difere levemente da distribuição etária estável assumida nas principais demonstrações ao longo do livro. Por conseguinte, enquanto os resultados na tabela 7 são mutuamente consistentes, eles não são estritamente comparáveis com aqueles das tabelas 3, 4 e 5.

***Nota**: O sinal $ é utilizado nas tabelas 1 a 6 para indicar unidades monetárias.*

TABELAS

Tabela 1 – Os dados

Grupo etário	População inicial		Salário anual ($)	Tempo de serviço anterior (anos)
	tabelas 3, 4 e 5	tabela 7		
20-25	1.415	1.478	1.330	2,5
25-30	1.339	1.381	1.940	7,5
30-35	1.265	1.289	2.440	12,5
35-40	1.193	1.201	2.850	17,5
40-45	1.121	1.114	3.160	22,5
45-50	1.047	1.027	3.370	27,5
50-55	967	937	3.480	32,5
55-60	878	840	3.500	37,5
60-65	775	733	3.500	42,5
Total	10.000	10.000		

Tabela 2 – A Base

Vidas ativas			Pensionistas	
Idade	Tábua de benefício	Escala de salário	Idade	Tábua de mortalidade
20	1.000	100	65	1.000
25	995	165	70	861
30	989	221	75	677
35	982	267	80	463
40	972	302	85	254
45	958	328	90	101
50	936	344	95	25
55	903	350	100	0
60	851	350		
65	775	350		

Tabela 3 – Projeções

Ano	Números			Valores				
	Ativos	Pensionistas	Proporção (%)	Salário de contribuição ($ '000)	Variante 1 Despesas ($ '000)	Variante 1 Despesas (%)	Variante 2 Despesas ($ '000)	Variante 2 PAYG* (%)
1	10.000	0	0	27.188	0	0	0	0
11	11.052	1.294	11,71	40.522	328	0,81	2.748	6,78
21	12.214	2.137	17,50	60.451	1.665	2,75	6.127	10,14
31	13.499	2.537	18,79	90.184	4.616	5,12	9.819	10,89
41	14.918	2.811	18,84	134.538	10.150	7,54	14.685	10,92
51	16.487	3.107	18,84	200.709	19.574	9,75	21.907	10,92
61	18.221	3.433	18,84	299.422	32.054	10,71	32.685	10,92
71	20.138	3.795	18,84	446.687	48.706	10,90	48.758	10,92
81	22.255	4.194	18,84	666.380	72.742	10,92	72.742	10,92

Nota: Números e valores "com força" no início do ano indicado.

*PAYG = sistema de repartição simples

Tabela 4a – Variante 1: sistemas GAP, TFS e AFS

Ano	GAP			TFS			AFS		
	Taxa de contribuição (%)	Reservas ($ milhões)	Múltiplo do salário de contribuição	Taxa de contribuição (%)	Reservas ($ milhões)	Múltiplo do salário de contribuição	Taxa de contribuição (%)	Reservas ($ milhões)	Múltiplo do salário de contribuição
1	6,08	0	0	0	0	0	6,53	0	0
11	6,08	26	0,64	2,05	3	0,08	6,41	28	0,69
21	6,08	77	1,27	4,10	15	0,25	6,24	82	1,35
31	6,08	162	1,79	6,14	39	0,43	6,06	172	1,90
41	6,08	292	2,17	8,19	84	0,62	5,89	308	2,29
51	6,08	473	2,36	9,22	159	0,79	5,83	499	2,48
61	6,08	723	2,41	9,22	253	0,85	5,83	760	2,54
71	6,08	1.081	2,42	9,22	379	0,85	5,83	1.136	2,54
81	6,08	1.613	2,42	9,22	566	0,85	5,83	1.695	2,54

Notas: AP1=6,53 por cento; AP2=5,83 por cento; taxas de contribuição no TFS e no AFS no início do ano indicado. Reservas no início do ano indicado.

Tabela 4b – Variante 1: sistemas SCP1 e SCP2

SCP1					SCP2				
Período (anos)	Taxa de contribuição (%)	Ano	Reservas ($ milhões)	Múltiplo do salário de contribuição	Período (anos)	Taxa de contribuição (%)	Ano	Reservas ($ milhões)	Múltiplo do salário de contribuição
		1	0	0			1	0	0
01:20	1,65	11	6	0,15	01:21	2,15	11	8	0,21
		21	11	0,18			21	18	0,31
21:40	5,35	31	35	0,39	21:40	6,09	31	56	0,62
		41	49	0,37			41	98	0,73
41:60	8,61	51	89	0,44	41:60	8,82	51	182	0,91
		61	105	0,35			61	282	0,94
61:80	9,63	71	131	0,29	61:80	9,02	71	425	0,95
		81	145	0,22			81	634	0,95
81+	10,49				81+	9,02			

Notas: Taxas de contribuição SCP para o período de 20 anos indicado. Reservas no início do ano indicado.

Tabela 5a – Variante 2: sistemas GAP/TFS e AFS

Ano	GAP/TFS			AFS		
	Taxa de contribuição (%)	Reservas ($ milhões)	Múltiplo do salário de contribuição	Taxa de contribuição (%)	Reservas ($ milhões)	Múltiplo do salário de contribuição
1	9,22	0	0	15,32	0	0
11	9,22	25	0,63	13,76	50	1,23
21	9,22	50	0,82	11,49	118	1,94
31	9,22	77	0,85	9,02	211	2,34
41	9,22	114	0,85	6,78	339	2,52
51	9,22	170	0,85	5,83	511	2,54
61	9,22	254	0,85	5,83	762	2,54
71	9,22	379	0,85	5,83	1.136	2,54
81	9,22	566	0,85	5,83	1.695	2,54

Nota: AP1=15,32 por cento; AP2=5,83 por cento. Taxa de contribuição no AFS no início do ano indicado.

Tabela 5b – Variante 2: sistemas ACC1 e ACC2

Ano	ACC1 Taxa de contribuição (%)	ACC1 Reservas ($ milhões)	ACC1 Múltiplo do salário de contribuição	ACC2 Taxa de contribuição (%)	ACC2 Reservas ($ milhões)	ACC2 Múltiplo do salário de contribuição
1	13,99	0	0	16,18	0	0
11	11,71	42	1,02	12,85	49	1,21
21	10,18	91	1,50	10,61	109	1,81
31	9,15	155	1,72	9,12	191	2,12
41	8,47	251	1,87	8,12	314	2,33
51	7,07	387	1,93	6,08	486	2,42
61	7,07	578	1,93	6,08	724	2,42
71	7,07	863	1,93	6,08	1.081	2,42
81	7,07	1.288	1,93	6,08	1.612	2,42

Nota.: Passivo inicial acumulado em $ milhões: ACC1, 29; ACC2, 43. Taxas de contribuição e reservas no início do ano indicado. Contribuições incluem contribuições e pagamentos "normais" visando à amortização do passivo inicial acumulado.

Tabela 5c – Variante 2: sistemas ENT e AGG

Ano	ENT Taxa de contribuição (%)	ENT Reservas ($ milhões)	ENT Múltiplo do salário de contribuição	AGG Taxa de contribuição (%)	AGG Reservas ($ milhões)	AGG Múltiplo do salário de contribuição
1	16,73	0	0	15,32	0	0
11	13,13	51	1,25	12,45	46	1,14
21	10,73	114	1,88	10,45	102	1,69
31	9,11	200	2,22	9,05	178	1,97
41	8,03	330	2,45	8,07	288	2,14
51	5,83	511	2,54	7,39	454	2,36
61	5,83	762	2,54	6,92	703	2,35
71	5,83	1.136	2,54	6,59	1.076	2,41
81	5,83	1.695	2,54	6,36	1.632	2,45

Nota.: Passivo inicial acumulado em $ milhões: ENT, 46. Taxas de contribuição e reservas no início do ano indicado. Contribuições incluem contribuições e pagamentos "normais" visando à amortização do passivo inicial acumulado.

Tabela 6 – Funções alíquota de contribuição e reservas relacionadas a idade (coorte entrando em t = 0)

Idade	ACC1 Taxa de contribuição (%)	ACC1 Reservas ($ '000)	ACC1 % das reservas finais	ACC2 Taxa de contribuição (%)	ACC2 Reservas ($ '000)	ACC2 % das reservas finais	ENT Taxa de contribuição (%)	ENT Reservas ($ '000)	ENT % das reservas finais
20	0,57	0	0	7,78	0	0	5,83	0	0
25	1,18	7	0,13	5,51	52	1,00	5,83	48	0,92
30	1,86	31	0,59	4,80	141	2,70	5,83	146	2,80
35	2,78	89	1,71	4,65	287	5,51	5,83	316	6,06
40	3,93	210	4,03	4,83	517	9,92	5,83	586	11,24
45	5,54	448	8,59	5,24	872	16,73	5,83	994	19,07
50	7,73	885	16,98	5,94	1.413	27,11	5,83	1.589	30,48
55	10,94	1.648	31,61	7,04	2.225	42,68	5,83	2.433	46,67
60	16,43	2.955	56,69	8,67	3.433	65,85	5,83	3.605	69,15
65	26,02	5.213		11,07	5.213		5,83	5.213	

Tabela 7 – Sensibilidade dos prêmios às mudanças nos parâmetros

Simulação	Parâmetros				Prêmios (%)			
(a) Caso geral								
	ρ	δ	γ	β	GAP	PAYG*(1)	AP2*	TFS*
1	1,00	6,00	3,00	2,75	8,82	10,68	5,71	9,03
2	1,00	6,25	3,00	2,75	8,63	10,68	5,27	8,85
3	1,00	5,75	3,00	2,75	9,02	10,68	6,19	9,21
4	1,00	6,00	3,00	2,75	8,72	10,36	5,71	8,84
5	0,90	6,00	3,00	2,75	8,93	11,01	5,71	9,22
6	1,00	6,00	3,25	2,75	8,84	10,45	6,07	9,03
7	1,00	6,00	2,75	2,75	8,81	10,92	5,37	9,03
8	1,00	6,00	3,00	3,00	9,00	10,92	5,83	9,21
9	1,00	6,00	3,00	2,50	8,65	10,45	5,60	8,85

(1) PAYG = Sistema de repartição simples

(b) Com indexação de renda								
	ρ	$\delta - \gamma$			GAP	PAYG*(1)	AP2*	TFS*
10	1,00	3,00			9,00	10,92	5,83	9,21
11	1,00	3,25			8,81	10,92	5,37	9,03
12	1,00	2,75			9,21	10,92	6,32	9,40
13	1,10	3,00			8,90	10,59	5,83	9,02
14	0,90	3,00			9,10	11,25	5,83	9,41

Nota: ρ = força de crescimento da população; δ = força dos juros; γ = força de escalonamento salarial; β = força de indexação das aposentadorias.

FIGURAS

Figura 1 – Diagrama de Lexis

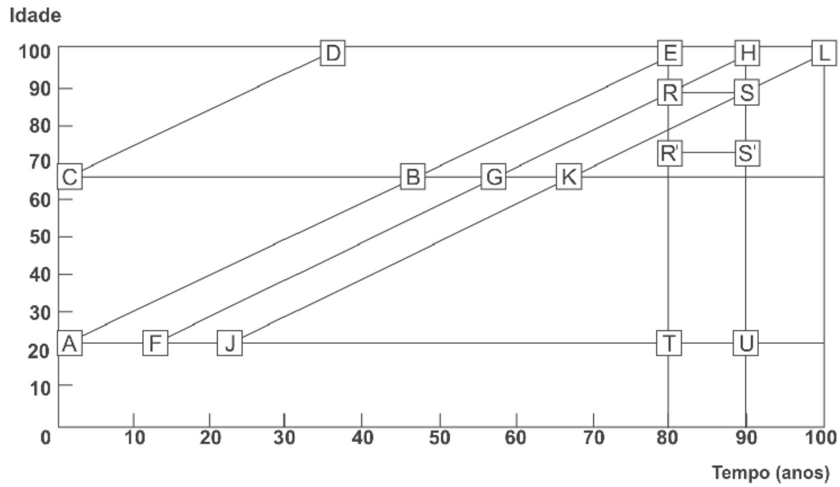


Figura 2 – Despesas com benefícios como um percentual da folha de salários segurada

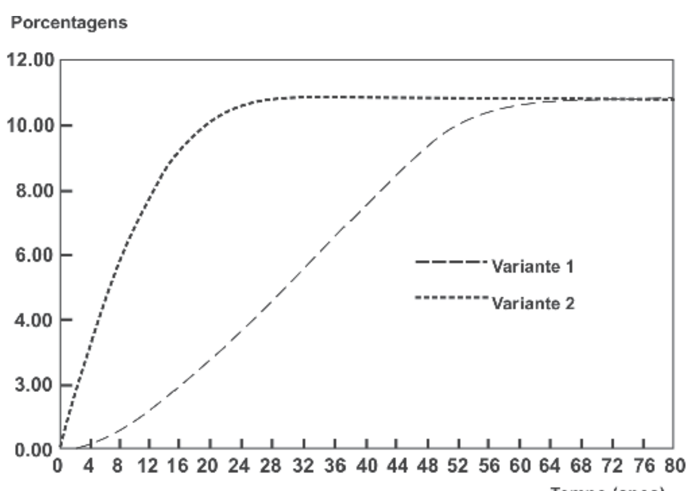


Figura 3 – Variante 1: Sistemas PAYG, GAP, TFS e AFS – alíquota de contribuição

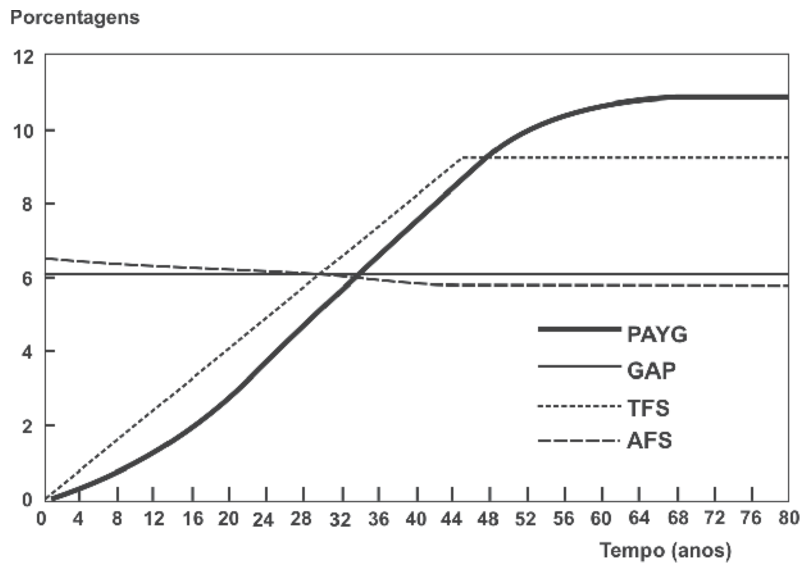


Figura 4 – Variante 2: Sistemas PAYG, GAP, TFS e AFS – alíquota de contribuição

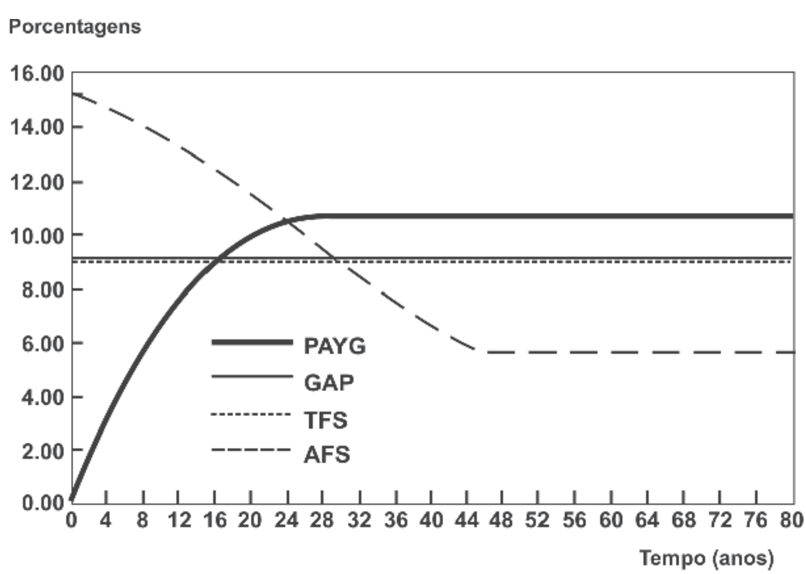


Figura 5 – Variante 1: Sistemas GAP, TFS e AFS – reservas como um múltiplo da folha de salários

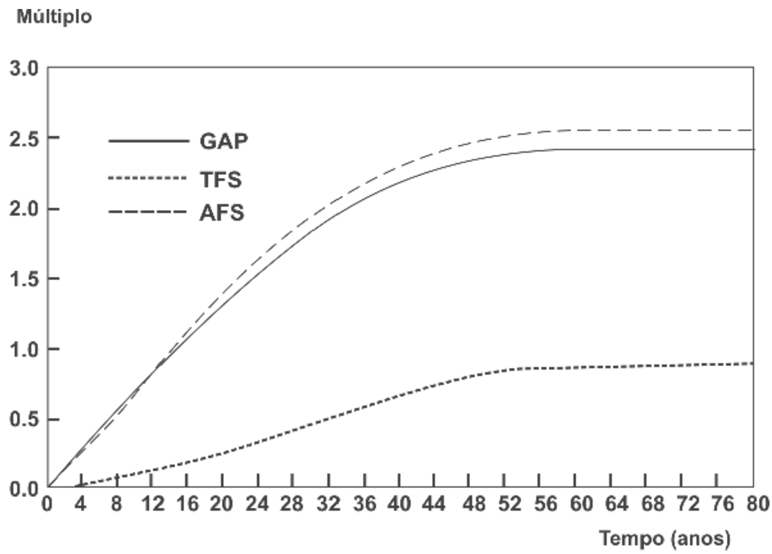


Figura 6 – Variante 2: Sistemas GAP, TFS e AFS – reservas como um múltiplo da folha de salários

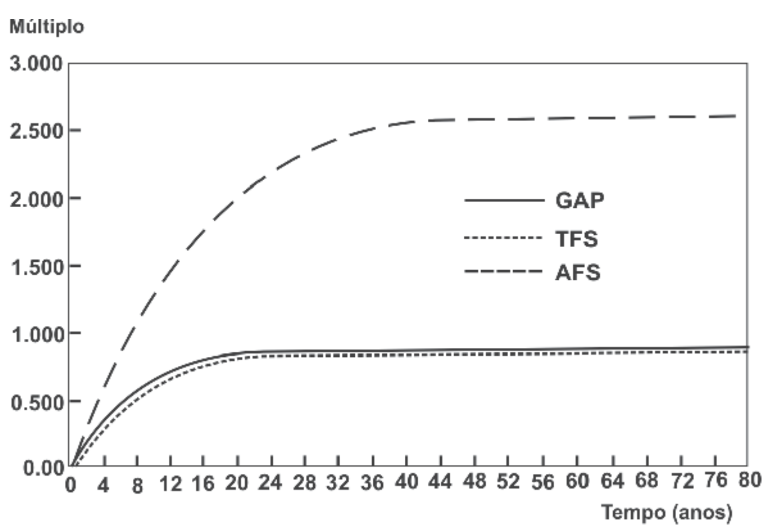


Figura 7 – Variante 1: O método do prêmio escalonado (comparado com o PAYG e GAP) – alíquotas de contribuição

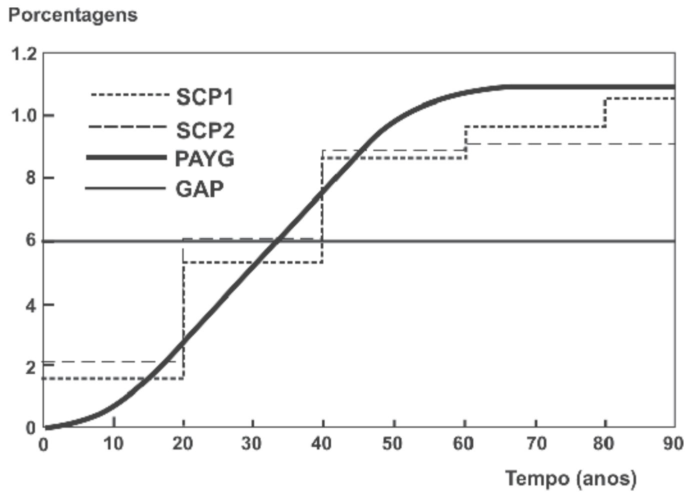


Figura 8 – Variante 1: O sistema de prêmio escalonado (comparado com o GAP) – reservas como um múltiplo da folha de salários

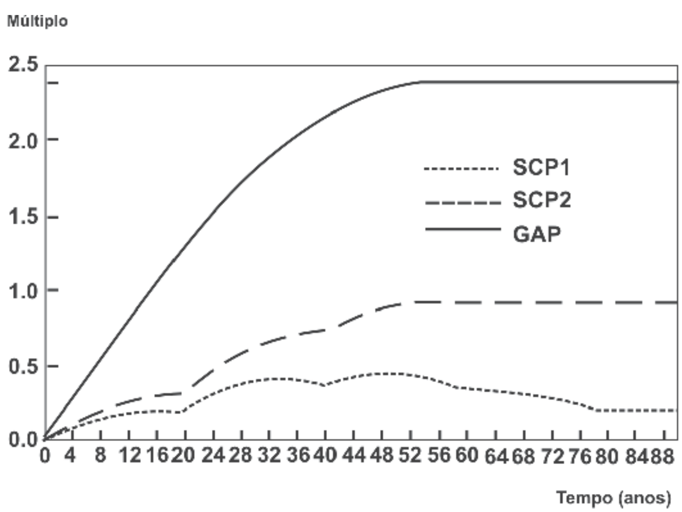


Figura 9 – Métodos de custo individual: função alíquota de contribuição relacionada à idade.

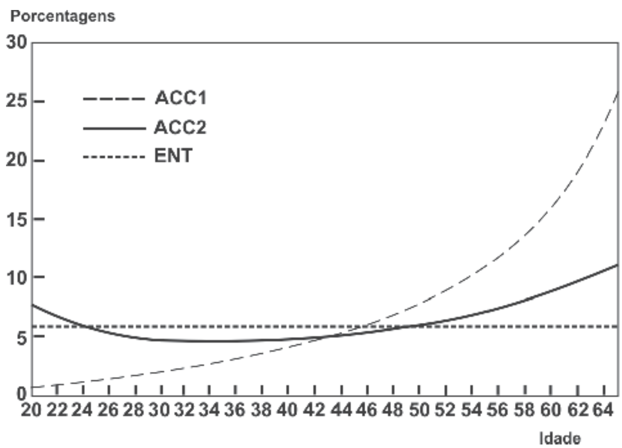


Figura 10 – Métodos de custo individual: função alíquota de contribuição relacionada à idade (expressa como um percentual da reserva final)

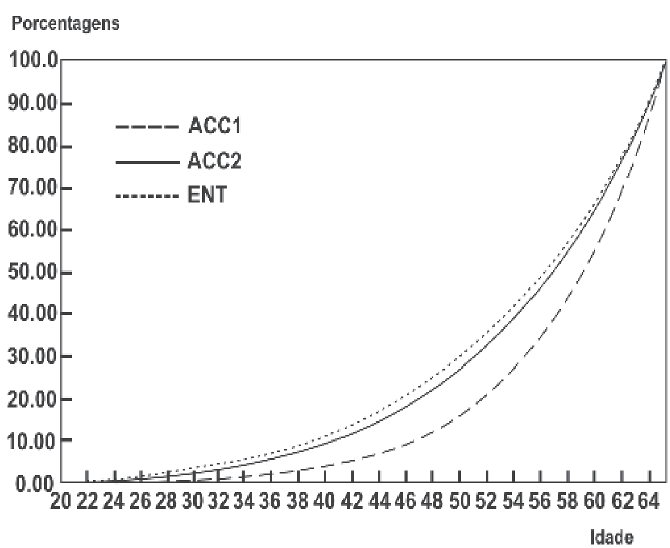


Figura 11 – Variante 2: Métodos de custo individual (comparados com GAP) – alíquotas de contribuição

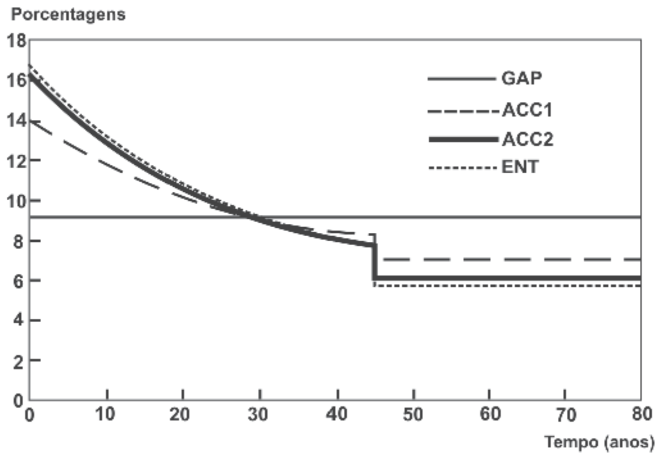


Figura 12 – Variante 2: Métodos de custo individual (comparados com GAP) – reservas como um múltiplo da folha de salários

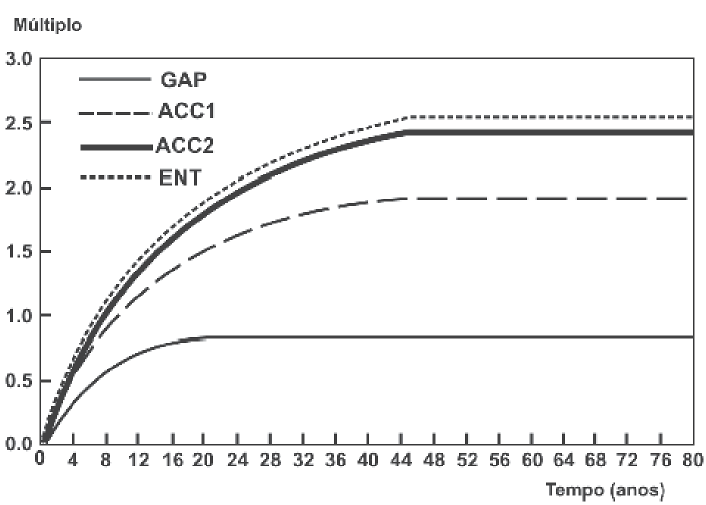


Figura 13 – Variante 2: Método de custos agregados (comparado com AFS, ENT e GAP) – Alíquotas de contribuição

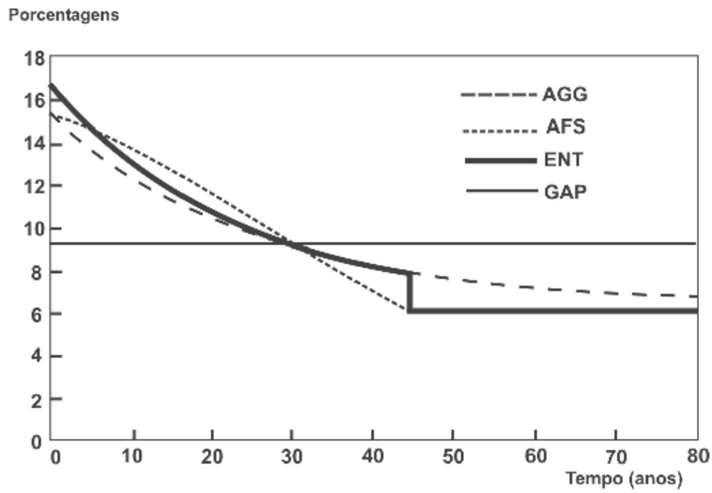
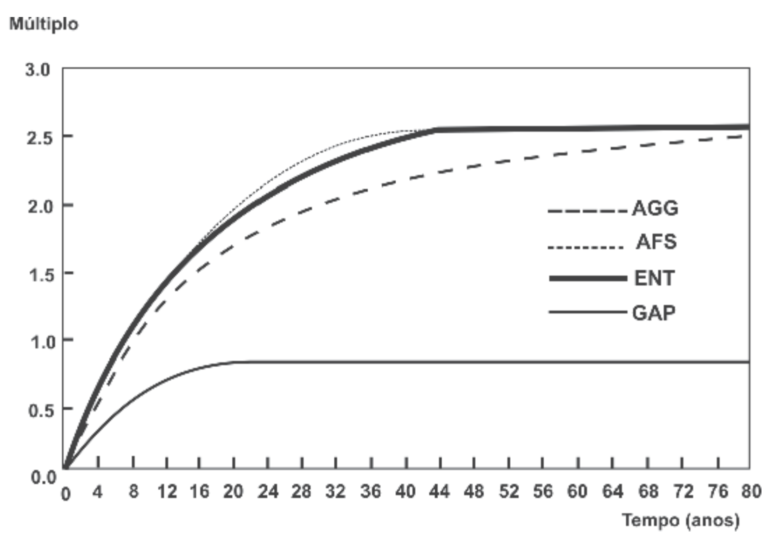


Figura 14 – Variante 2: Método de custos agregados (comparado com AFS, ENT e GAP) – reservas como um múltiplo da folha de salários



APÊNDICE 3

GLOSSÁRIO DOS PRINCIPAIS MÉTODOS DE FINANCIAMENTO E CAPITALIZAÇÃO

Acrônimo	*Título completo*	*Breve descrição*
PAYG	Repartição simples	As contribuições se equilibram com as despesas a intervalos regulares de tempo (por exemplo: anualmente)
GAP	Método do prêmio médio geral	A alíquota de contribuição permanece no mesmo nível ad infinitum
AFS	Método de capitalização autônoma	*A população inicial e os novos entrantes constituem grupos autônomos separados de risco, aplicando-se os respectivos prêmios médios (AP1 e AP2) como alíquotas de contribuição*
TFS	Método de repartição de capitais de cobertura	As contribuições se equilibram com o valor de capital das novas aposentadorias concedidas a intervalos selecionados de tempo (por exemplo: anualmente)
SCP	Método do prêmio escalonado	Nível de alíquotas de contribuição fortemente crescente em intervalos sucessivos, com um fundo de reservas não decrescente. Variantes específicas: as reservas atendem a um máximo local (SCP1) ou atendem a taxa de crescimento da situação de maturidade financeira (SCP2) ao fim de cada intervalo
ACC	Método dos benefícios acumulados	As alíquotas de contribuição relacionadas à idade são determinadas de tal forma que para novos entrantes, o fundo de reservas relacionado à idade se iguala aos benefícios acumulados baseados no trabalho corrente (ACC1) ou no salário corrente ou projetado (ACC2), com indexação de benefícios. Passivo acumulado inicial é capitalizado separadamente (isto é, através de pagamentos uniformes distribuídos durante o tempo de vida ativa do mais jovem entrante inicial)

ENT	Método da idade de entrada	Para novos entrantes, benefícios capitalizados através de alíquota de contribuição durante toda a vida ativa. O passivo atuarial inicial é capitalizado da mesma forma que no ACC.
AGG	Método agregado	A alíquota de contribuição relacionada ao tempo é determinada como aquela que produz o equilíbrio de fundo fechado naquele momento.

APÊNDICE 4

LISTA DE SÍMBOLOS

A lista que se segue contém símbolos especiais que foram adotados para os propósitos deste livro, na ordem em que foram introduzidos. Símbolos e funções atuariais básicas não foram incluídos, mas podem ser encontrados no apêndice 1. Similarmente, as funções comutacionais especiais utilizadas no capítulo 6 para a aplicação da técnica do valor presente, que tem sido largamente padronizada na literatura atuarial, não foram reproduzidas.

Capítulo 1

δ	Força dos juros
ρ	Força do crescimento de novos entrantes
γ	Força do crescimento dos salários em razão do mérito
β	Força da indexação dos benefícios
μ_x^d	Força da mortalidade na idade x
μ_x^i	Força da invalidez na idade x
θ	Força da inflação
$A(t)$	Função população ativa
$R(t)$	Função população aposentada
$S(t)$	Função salário segurado
$B(t)$	Função despesa
w	Limite da vida
w_1	Tempo necessário para um sistema de previdência alcançar a maturidade demográfica
w_2	Tempo necessário para um sistema de previdência alcançar a maturidade financeira

$C(t)$	Função alíquota de contribuição, relacionada ao tempo
$V(t)$	Função reservas, relacionada ao tempo
PAYG	Método de financiamento de repartição simples ou pay-as-you-go
PAYG_n	Alíquota de contribuição para o método PAYG no *n-ésimo* ano financeiro
GAP	Método do prêmio médio geral
$B1(t)$	Função despesa para a população inicial
$B2(t)$	Função despesa para novos entrantes
$S1(t)$	Função salário segurado para a população inicial
$\mathrm{S}2(t)$	Função salário segurado para novos entrantes
$AP1$	Prêmio médio para a população inicial
$AP2$	Prêmio médio para novos entrantes
AFS	Método de financiamento autônomo”
$Ka(t)$	Valor capitalizado dos benefícios concedidos no tempo t
TFS	Método de repartição de capitais de cobertura
$TFS(t)$	Função alíquota de contribuição do método de repartição de capitais de cobertura
k	Taxa de reservas
λ	Taxa de equilíbrio
SCP	Método do prêmio escalonado (variantes SCP1 e SCP2)
PAYG^*	Prêmio de repartição simples na situação de maturidade financeira
$\pi(n, m)$	Taxa de contribuição no método do prêmio escalonado para o intervalo (n, m)

Capítulo 2

$K(x)$	Função alíquota de contribuição relacionada a idade para uma coorte
$F(x)$	Função reserva relacionada a idade por unidade de salário de entrada para uma coorte
b	Idade de entrada de uma coorte (geralmente a idade de entrada mais baixa)
r	Idade de aposentadoria de uma coorte (geralmente a mais alta idade de aposentadoria)
s_x	Função escala relativa de salários
l_x^a	Função sobrevivência para pessoas ativas
l_x^p	Função sobrevivência para pessoas aposentadas
$D_x^{as(\alpha)}$	Função comutacional de nível 1, baseada na função sobrevivência de ativos e força de juros α, incorporando a função escala salarial
$\bar{N}_x^{as(\alpha)}$	Função comutacional de nível 2, integral da função de nível 1 no intervalo (x, r)
$\bar{a}_x^{p(\alpha)}$	Anuidade vitalícia pagável continuamente, baseada na tábua de vida para aposentados e na força dos juros α
$ACC1$	Método do custo benefício acumulado 1
$ACC2$	Método do custo benefício acumulado 2
ENT	Método do custo da idade de entrada
AGG	Método do custo agregado

Capítulo 3

$Ac(x, t)$	Função população ativa, relacionada a idade e tempo
$Re(x, t)$	Função população aposentada, relacionada a idade e tempo
$Sa(x, t)$	Função salário segurado, relacionada a idade e tempo

$Be(x, t)$	Função despesa, relacionada a idade e tempo
$\overline{a}^{as(\alpha)}_{x:\overline{n}\vert}$	Anuidade vitalícia com período fixo, baseada na tábua de serviço para pessoas ativas e na força dos juros x. O montante da anuidade cresce, partindo da unidade, de forma paralela à escala de salários
$AP2^*$	Prêmio médio para novos entrantes
TFS^*	Prêmio do método de repartição de capitais de cobertura na situação de maturidade
GAP^*	Prêmio médio geral sob indexação salarial
$ADTS$	Termo descontado médio dos salários segurados
$ADTB$	Termo descontado médio das despesas
$\lambda(x)$	Função densidade de contribuição
$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$	Médias ponderadas das densidades de contribuição
$B_a(z)$	Despesas no tempo z ($>t$) das aposentadorias correntes ao tempo t
$B_b(z)$	Despesas no tempo z ($>t$) de aposentadorias concedidas após o tempo t
$V_b(t)$	Reserva para aposentados no tempo t
$V_a(t)$	Reserva para pessoas ativas no tempo t
$\delta(u)$	Força dos juros com uma função do tempo
ϕ	Força dos juros reais ($= \delta - \gamma$)

Capítulo 4

γ^*	Força do crescimento dos salários, incorporando crescimento geral e os efeitos do crescimento em razão do mérito
ϕ^*	Diferença entre a força de crescimento dos salários e a força dos juros ($\gamma^* - \delta$)

Capítulo 5

$Fd(n)$	Valor alocado em reserva no tempo n
n_t	Vetor de projeções demográficas agregadas
Q_t	Matriz de transição de probabilidades para um ano
$I(t)$	Função aposentados inválidos
$W(t)$	Função pensionistas viúvo/viúva
$O(t)$	Função pensionistas órfãos
$p_x^{(rr)}$	Probabilidade de transição do status r para o status r
$q_x^{(rs)}$	Probabilidade de transição do status r para o status s
l_x^i	Função sobrevivência de inválidos
r^*	Mais baixa idade de aposentadoria
l_x^w	Função sobrevivência de viúvos/viúvas
y^*	Mais baixa idade de viúvo/viúva
l_x^o	Função sobrevivência de órfãos
z^*	Idade limite de aposentadorias de órfãos
w_x	Proporção de casados na idade x
y_x	Idade média do cônjuge
n_x	Número médio de órfãos de uma pessoa morrendo na idade x
z_x	Idade média dos órfãos
$Act(x,s,t)$	Função população ativa, relacionada à idade, tempo e tempo de serviço

$In(x, t)$	Função aposentados por invalidez, relacionada à idade e ao tempo
$Wi(x, t)$	Função pensionistas viúvos/viúvas, relacionada à idade e ao tempo
$N(x, t)$	Função novos entrantes, relacionada à idade e ao tempo (anos)
$Z(x, t)$	Ativos sobreviventes de $N(x, t)$ ao fim do ano de entrada
$pr(x)$	Distribuição de idades da geração de novos entrantes
$\gamma(t)$	Taxa de crescimento dos salários devido ao mérito no ano de projeção t
$\beta(t)$	Taxa de indexação de benefícios no ano de projeção t
$i(t)$	Taxa de retorno do investimento no ano de projeção t
$dc(x)$	Densidade de contribuição na idade x
$db(x)$	Densidade de benefícios na idade x
$j(t)$	Fator de ajustamento para projeção da função salário relativo
$s(x, t)$	Função média salarial, relacionada a idade e ao tempo
$sn(x, t)$	Função média salarial para novos entrantes
$\Phi(x)$	Função distribuição normal padronizada
$s1(x, t)$	Função média salarial para o grupo de mais baixa renda
$s2(x, t)$	Função média salarial para o grupo de renda média
$s3(x, t)$	Função média salarial para o grupo de mais alta renda
$ss(x, t)$	Função salário relativo
$b(x, t)$	Função benefício médio
$sv(x, t)$	Função serviço acumulado
$IA(t)$	Função população ativa, projeções da população inicial
$NA(t)$	Função população ativa, projeções do padrão de novos entrantes
$IR(t)$	Função população aposentada, projeções da população inicial
$NR(t)$	Função população aposentada, projeções do padrão de novos entrantes

$TR(t)$	Função população total de aposentados
$na(t)$	Número de novos entrantes no *t-ésimo* ano de projeção
$TS(t)$	Salários totais segurados, ao fim do *t-ésimo* ano de projeção
$TP(t)$	Total de aposentados, ao fim do *t-ésimo* ano de projeção
$ADJ(t)$	Fator de ajustamento para agregação
S_t	Folha de salários de segurados, ano de projeção *t*
B_t	Despesas totais, ano de projeção *t*
DS_t	Folha de salários de segurados no ano *t*, descontada para a data da avaliação
DB_t	Despesas totais do ano t, descontadas para a data de avaliação
TDS_t	Soma acumulada de folhas de salários descontadas
TDB_t	Soma acumulada de despesas totais descontadas

Capítulo 6

$PVS(x)$	Valor presente provável dos salários segurados
$PVI(x)$	Valor presente provável das aposentadorias por invalidez
$PVR(x)$	Valor presente provável das aposentadorias
$PVW1(x)$	Valor presente provável de pensões de viúvos/viúvas (morte em serviço)
$PVW2(x)$	Valor presente provável de pensões de viúvos/viúvas (morte após invalidez)
$PVW3(x)$	Valor presente provável de pensões de viúvos/viúvas (morte após aposentadoria)
$p(r, x)$	Taxa de aposentadoria por idade e tempo de serviço, para a coorte em idade x na data da avaliação
$p(t, x)$	Taxa de aposentadoria por invalidez na idade t, para a coorte de idade x na data da avaliação

$ps(x)$	Tempo de serviço passado na data da avaliação
$sn(x)$	Salário médio segurado da geração padrão de novos entrantes na data da avaliação

APÊNDICE 5

A VARIANTE SCP1 DO MÉTODO DO PRÊMIO ESCALONADO

Este apêndice trata com uma variante específica do método de prêmio escalonado, no qual o nível de prêmio em um intervalo qualquer (n, m) é positivo e leva a um fundo de reservas positivo e não decrescente, alcançando um máximo local ao fim do intervalo. As duas condições

$$B'(t) > 0 \tag{A5.1a}$$

$$\frac{B'(t)}{B(t)} \geq \frac{S'(t)}{S(t)} \tag{A5.1b}$$

são, juntas, suficientes para a existência desta variante. Devemos notar que a segunda condição pode também ser expressa como

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{B(t)}{S(t)}\right) \geq 0 \tag{A5.2}$$

a qual implica que o prêmio de repartição simples é uma função não decrescente de t. Devemos também observar que em vista de (A5.1b), $S'(t) > 0$ implica $B'(t) > 0$, embora o inverso não seja verdadeiro. Portanto, (A5.1a) deixa o sinal de $S'(t)$ incerto, isto é, $S(t)$ pode ser uma função crescente ou decrescente.

O resultado que desejamos pode ser provado por indução, em três estágios. Assumindo que SCP1 existe para o intervalo precedente a um intervalo específico (n, m), é possível mostrar que ela existe para este intervalo. Podemos então facilmente demonstrar que o sistema existe para o primeiro intervalo $(0, p)$. Daí segue que SCP1 existe para o intervalo total de tempo do sistema de previdência.

Teorema 1

Proposição: se as condições (A5.1a) e (A5.1b) são satisfeitas para o intervalo (n, m), a função

$$\pi(t) = \frac{B(t)e^{-\delta t} + \delta\int_n^t B(z)e^{-\delta z}dz - \delta V(n)e^{-\delta n}}{S(t)e^{-\delta t} + \delta\int_n^t S(z)e^{-\delta z}dz} \qquad \textbf{(A5.3)}$$

onde *V*(*n*) denota a reserva no início do intervalo, é positiva e é uma função crescente de *t* no intervalo, dado que SCP1 existe no intervalo precedente.

Prova: Façamos a reserva sob a aplicação de $\pi(t)$ em (n,t) ser denotada por $R(u,t), n \le u \le t$, dado por

$$R(u,t)e^{-\delta u} = V(n)e^{-\delta n} + \pi(t)\int_n^u S(z)e^{-\delta z}dz - \int_n^u B(z)e^{-\delta z}dz \qquad \textbf{(A5.4)}$$

Devemos notar que a expressão (A5.3) é, de fato, a fórmula usual para o prêmio SCP1 para o intervalo (n,t), a qual pode ser derivada fazendo-se $u = t$ na equação diferencial fundamental para o intervalo (n,t) – expresso como uma equação diferencial parcial no contexto presente – isto é,

$$\frac{\partial R(u,t)}{\partial u} = \delta R(u,t) + \pi(t)S(u) - B(u) \qquad \textbf{(A5.5)}$$

igualando a zero e substituindo por $R(u,t)$ em (A5.4).

Façamos o numerador e o denominador de (A5.3) ser denotado por *N*(*t*) e *D*(*t*). Então $D(t) > 0$ e $N(t) > 0$ dado que $\delta V(n) < B(n)$, onde *V*(*n*), sendo a reserva inicial para o intervalo (n,m), é igual a reserva final do intervalo anterior, digamos (q,n) (ver nota 1). Já que, por pressuposto, SCP1 existe no intervalo prévio, π^*, o nível do prêmio naquele intervalo é positivo e satisfaz a condição

$$\delta V(n) + \pi^* S(n) - B(n) = 0 \qquad \textbf{(A5.6)}$$

a qual implica que $\delta V(n) < B(n)$. Isso assegura que $\pi(t) > 0$.

Diferenciando (A5.3) em relação a *t* e simplificando,

$$\pi'(t)D(t)^2 e^{\delta t} = D(t)B'(t) - N(t)S'(t) \qquad \textbf{(A5.7)}$$

Isso demonstra (veja nota 2) que o prêmio PAYG ao fim do intervalo (n,t) excede $\pi(t)$, isto é

$$\frac{B(t)}{S(t)} > \frac{N(t)}{D(t)} \tag{A5.8}$$

Multiplicando ambos os lados por $S(t)D(t)$, o qual, sendo positivo, não troca de sinal

$$B(t)D(t) > S(t)N(t)$$

Observe que ambos os lados da inequação acima são positivos. Portanto,

$$\frac{1}{N(t)S(t)} > \frac{1}{B(t)D(t)}$$

Da mesma forma, multiplicando ambos os lados de (A5.1b) por $S(t)B(t)$, o qual sendo positivo, não troca de sinal

$$B^{'}(t)S(t) \geq S^{'}(t)B(t)$$

Note que o lado esquerdo da desigualdade acima é positivo, em virtude de (A5.1a). Assim, multiplicando ambos os lados desta expressão pelos lados correspondentes da desigualdade anterior – a qual possui elementos positivos em ambos os lados – não alterará o sinal. Portanto,

$$\frac{B'(t)}{N(t)} > \frac{S'(t)}{D(t)}$$

Multiplicando ambos os lados por $N(t)D(t)$, que sendo positivo, não terão sinais alterados

$$D(t)B^{'}(t) > N(t)S^{'}(t) \tag{A5.9}$$

Por conseguinte, de (A5.7) temos que $\pi^{'}(t) > 0$. Isso prova que $\pi(t)$ é uma função crescente de t.

Teorema 2

Pressuposto: Façamos $V(t)$ $(= R(t,m)$ na notação do Teorema 1) denotar a reserva resultante da aplicação do prêmio $\pi(m)$ no intervalo (n,m). Então $V(t)$ é uma função crescente, isto é, $V^{'}(t) > 0$ para $n < t < m$, e $V^{'}(m) = 0$.

Prova: A equação diferencial fundamental nos pontos do intervalo (n, m) , pode ser escrita como

$$V^{'}(t) = \delta V(t) + \pi(m)S(t) - B(t)$$

onde $V(t)$ é dado por

$$V(t)e^{-\delta t} = V(n)e^{-\delta n} + \pi(m)\int_n^t S(z)e^{-\delta z}dz - \int_n^t B(z)e^{-\delta z}dz$$

Eliminando $V(t)$ entre as duas equações acima e simplificando

$$V'(t) = e^{\delta t}D(t)\left[\pi(m) - \pi(t)\right] \quad \textbf{(A5.10)}$$

Em razão do Teorema 1, segue-se que $V^{'}(t) > 0$ para $n < t < m$ e que $V^{'}(m) = 0$.

Da mesma forma será óbvio que se $V(n) > 0$, então $V(t) > 0$ para $n < t < m$.

Mas, $V(n) = V(0) = 0$ no primeiro intervalo $(0, p)$. Portanto, em geral, $V(t) > 0$

Teorema 3

Proposição: Se π^* denota o prêmio SCP1 em um intervalo precedente (q,n), $\pi(m) > \pi^*$

Prova: Da nota 1, pode ser visto que

$$Lt_{t \to n+}(\pi(t)) = \frac{B(n) - \delta V(n)}{S(n)}$$

Em razão do teorema 1, $\pi^{'}(t) > 0$. Portanto,

$$\pi(t) > \frac{B(n) - \delta V(n)}{S(n)}$$

E, tendo em vista (A5.6)

$$\pi^{*} = \frac{B(n) - \delta V(n)}{S(n)}$$

Assim, $\pi(t) > \pi^{*}$, e em particular,

$$\pi(m) > \pi^{*}$$

Conclusão

Partindo das condições (A5.1a) e (A5.1b) e o pressuposto que SCP1 existe no intervalo precedente (n,m) , o Teorema 1 foi estabelecido. O Teorema 2 que se segue do Teorema 1 mostrou que, se o prêmio no intervalo (n,m) é determinado de acordo com a fórmula (A5.3), a função reserva cresce em todo o intervalo e alcança um máximo local ao fim do intervalo. Em adição, o teorema 3 mostrou que o prêmio determinado de acordo com esta fórmula é maior que o prêmio determinado de acordo com a mesma fórmula aplicada ao intervalo precedente.

No primeiro intervalo $(0,p)$, a reserva inicial é $V(0) = 0$, e os Teoremas 1 e 2 podem ser obtidos da mesma forma. O Teorema 3 não se aplica ao primeiro intervalo. Dado que $V(0) = 0$, o prêmio SCP1 em (0, p) é positivo (ver A5.3).

Segue-se por indução que sob as condições (A5.1a) e (A5.1b), SCP1 existe para a totalidade do intervalo de tempo do sistema de previdência.

Devemos enfatizar que as demonstrações acima asseguram que as condições (A5.1a) e (A5.1b) são suficientes, mas não necessárias para a existência de SCP1.

Acidentalmente demonstramos que a função prêmio $\pi(t)$ e a função reserva $V(t)$ são ambas positivas.

Nota 1: $N^{'}(t) = B^{'}(t)e^{-\delta t}$. Similarmente, $D^{'}(t) = S^{'}(t)e^{-\delta t}$

Portanto, $N^{'}(t) > 0$.

$$Lt_{t\to n+}(N(t)) = (B(n) - \delta V(n))e^{-\delta n}$$

Portanto, $N(t) > 0$ se $\delta V(n) < B(n)$.

Nota 2: Por (A5.3) podemos observar que $\pi(t)$ pode ser entendida como a média ponderada de $B(t)/S(t)$ e

$$\text{AVP}(t) = \frac{\int_n^t B(z)e^{-\delta z}dz - V(n)e^{-\delta n}}{\int_n^t S(z)e^{-\delta z}dz}$$

Em vista de (A5.2),

$$\frac{B(t)}{S(t)} \geq \frac{\int_n^t B(z)e^{-\delta z}dz}{\int_n^t S(z)e^{-\delta z}dz} > \text{AVP}(t)$$

Segue portanto que

$$\frac{B(t)}{S(t)} > \pi(t) > \text{AVP}(t)$$

APÊNDICE 6

APLICAÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO LOGNORMAL

Façamos y denotar o salário e $z = log_e y$, onde $0 < y < \infty$ e $-\infty < z < \infty$. Assumimos que y tem distribuição lognormal, ou em outras palavras, z tem distribuição normal. Representemos os parâmetros da distribuição de z por μ e σ^2. A função densidade de probabilidade de z é

$$p(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2} \right) \quad \textbf{(A6.1)}$$

Os parâmetros da distribuição de y podem ser expressos em termos de integrais da distribuição de z, simplificada e expressa em termos da função de distribuição normal padrão. Por este procedimento as expressões (5.27) e (5.28) do capítulo 5, para a média e a variância de y, podem ser derivadas. Esses são resultados-padrão.

O mesmo procedimento pode ser aplicado para derivar a expressão (5.31) para a média de y no intervalo (y_a, y_b). Façamos z_a e z_b denotarem os valores correspondentes de z. Representemos por $F(y)$ e $G(z)$ as funções de distribuição de y e z. Então,

$$F(y_b) - F(y_a) = G(z_b) - G(z_a) \quad \textbf{(A6.2)}$$

A média requerida representada por A, é dada por

$$A = \frac{\int_{y_a}^{y_b} yp(y)dy}{F(y_b) - F(y_a)} \quad \textbf{(A6.3)}$$

Substituindo a variável z no numerador,

$$A = \frac{\int_{z_a}^{z_b} e^z p(z)dz}{G(z_b) - G(z_a)} \quad \textbf{(A6.4)}$$

O integrando do numerador que, em razão de (A6.1), tem a seguinte expressão

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(z-u)^2}{2\sigma^2}+z\right) \qquad \textbf{(A6.5)}$$

pode ser simplificada como

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)\exp\left(-\frac{(z-\mu-\sigma^2)^2}{2\sigma^2}\right) \qquad \textbf{(A6.6)}$$

Substituindo pela variável padronizada *t*,

$$t=\frac{z-\mu}{\sigma}-\sigma$$

e observando-se – ver (5.28) – que a média geral da distribuição de *y*, digamos *B*, é

$$B=\exp\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)$$

Segue-se que *A* pode ser expresso em termos de *B* e a função de distribuição $\Phi(t)$ da normal padrão como

$$A=B\,\frac{\Phi(w_b-\sigma)-\Phi(w_a-\sigma)}{\Phi(w_b)-\Phi(w_a)} \qquad \textbf{(A6.7)}$$

onde

$$w_a=\frac{z_a-\mu}{\sigma}$$

e

$$w_b=\frac{z_b-\mu}{\sigma}$$

BIBLIOGRAFIA

Aaron, Henry. 1966. “The social insurance paradox”, em *Canadian Journal of Economics and Political Science* (Toronto, University of Toronto Press), Vol. XXXII, No. 3.

Banco Mundial. 1994. *Averting the old age crisis: Policies to protect the old and promote growth* (New York, Oxford University Press).

Beattie, Roger; McGillivray, Warren. 1995. “A risky strategy: Reflections on the World Bank Report, *Averting the old age crisis*”, em *International Social Security Review* (Geneva, ISSA), 3-4/95.

Bowers, Newton L.; Gerber, Hans U.; Hickman, James C; Jones, Donald A.; Nesbitt, Cecil J. 1986 and 1997 (second edition). *Actuarial mathematics* (Itasca, Illinois, Society of Actuaries).

Boye, S. 1971. “Actuarial calculations relating to widows’ pensions based on relative age distributions of widows as compared with average ages of widows”, em ISSA: *Proceedings of the Fifth International Conference of Social Security Actuaries and Statisticians* (Berne).

Crescentini Laura; Spandonaro, Frederico. 1992. “Methodological developments in forecasting techniques”, em ISSA: *Quantitative analysis and the planning of social protection* (Geneva).

Daykin, Christopher D. 1996. “Actuarial and financial problems associated with the development of complementary pension schemes”, em ISSA, 1996.

___; Pentikainen, T.; Pesonen, M. 1994. *Practical risk theory for actuaries* (London, Chapman and Hall).

Ferrara, Giovanna; Drouin, Anne. 1996. “Observations on actuarial concepts used in a simplified pension model”, em ISSA, 1996.

Gillion, Colin; Bonilla, Alejandro. 1992. "Analysis of a national private pension scheme: The case of Chile", em *International Labour Review* (Geneva, ILO), Vol. 131, No. 2.

Hirose, Kenichi. 1996. "A generalisation of the concept of the scaled premium", em ISSA, 1996.

Hooker, P.F.; Longley-Cook, L.H. 1953 (Vol. 1) and 1957 (Vol. 2). *Life and other contingencies* (Cambridge, Institute of Actuaries and Faculty of Actuaries).

International Social Security Association (ISSA). 1996. *Social security financing: Issues and perspectives* (Geneva).

Iyer, S.N. 1971. "The role of national provident funds and pension schemes in capital formation", em ISSA: *Proceedings of the Fifth International Conference of Social Security Actuaries and Statisticians* (Berne).

___; 1993. "Pension reform in developing countries", *em International Labour Review*, Vol. 132, No. 2.

___; McGillivray, W. 1988. "The influence of variations in the level of employment and recent retirement policies on the financing of pension schemes", em ISSA: *Current problems of pensions schemes* (Geneva).

Jordan, Chester Wallace, Jr. 1967. *Society of Actuaries' textbook on life contingencies* (Chicago, Illinois, Society of Actuaries; 2nd ed.).

Lee, E.M. 1986. *An introduction to pension schemes* (London, Institute of Actuaries and Faculty of Actuaries).

McGillivray, Warren R. 1992. "Actuarial aspects of converting provident funds into social insurance schemes", em Committee on Provident Funds: *Twelfth Meeting of the Committee, Reports and summaries of discussions* (Geneva, ISSA).

___; 1996. "Actuarial valuations of social security schemes: Necessity, utility and misconceptions", em ISSA, 1996.

___; 1997. *An operational framework for pension reform: Retirement system risks* (Geneva, ILO, Social Security Department; mimeographed).

Neill, Alistair. 1986. *Life contingencies* (London, Heinemann).

Organização Internacional do Trabalho (OIT). 1984. *Introduction to social security* (Geneva, 3rd ed.).

___; 1996. OIT-DIST: *The ILO wage distribution model* (Geneva); mimeographed.

___; 1997. OIT-PENS: *The ILO pension model* (Geneva); mimeographed.

Picard, J.-P. 1971. "Note on a computer programme for making demographic and financial projections under a pension scheme involving survivors' benefits", em ISSA: *Proceedings of the Fifth International Conference of Social Security Actuaries and Statisticians* (Berne).

___; 1975. *Application de l'ordinateur aux projections démographiques et financières d'un régime d'assurance-pensions*, artigo apresentado durante a sexta International Conference of Social Security Actuaries and Statisticians (Helsinki, ISSA).

___; 1979. *Le programme d'ordinateur du Bureau international du Travail pour les projections démographiques et financières des régimes de sécurité sociale*, artigo apresentado durante a sétima International Conference of Social Security Actuaries and Statisticians (Mexico, ISSA).

___; 1996. "Valuation of the financial equilibrium of long-term benefits schemes", em ISSA, 1996.

Thullen, P. 1964. "The scaled premium system for the financing of social insurance pension schemes", em *International Review on Actuarial and Statistical Problems of Social Security*, No. 10 (Geneva, ISSA).

___; 1973. *Techniques actuarielles de la sécurité sociale* (Geneva, ILO).

Tilove, Robert. 1976. *Public employee pension funds* (New York and London, Columbia University Press).

Trowbridge, C.L.; Farr, C.E. 1976. *The theory and practice of pension funding* (Homewood, Illinois, Richard D. Irwin).

Zelenka, A. 1958. "Quelques remarques sur le régime financier", em ISSA: *Actuarial and statistical problems of social security*, Vol. III (Geneva and Rome).

___; 1959. "Fonctions biométriques et économiques interchangeables dans l'équation générale de l'équilibre financier", em ISSA: *Transactions of the Second International Conference of Social Security Actuaries and Statisticians* (Geneva).

ÍNDICE REMISSIVO