

# Cosmologia a partir da teoria de Kaluza-Klein

Pedro H.R.S. Moraes, Orientador: Dr. Oswaldo D. Miranda

DAS/INPE

- 1 Introdução
- 2 O modelo gravitacional de Kaluza-Klein
- 3 Análise da cosmologia a partir do modelo de Kaluza-Klein

- 1 Introdução
- 2 O modelo gravitacional de Kaluza-Klein
- 3 Análise da cosmologia a partir do modelo de Kaluza-Klein

- A teoria da Relatividade Geral (RG), baseada na equação de campo de Einstein,

$$G_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}, \quad (1)$$

requer a existência de um componente responsável pela maior parte da dinâmica do universo.

- Na RG, esse componente é tratado como uma constante cosmológica,  $\Lambda$ , que é inserida nas equações de campo.
- A inserção da constante cosmológica nas equações de campo faz com que a distância de luminosidade derivada do modelo concorde com as observações.

- A constante cosmológica é apenas um dentre os diversos modelos de energia escura.
- Temos como outros exemplos: modelo  $\phi$  CDM, modelos  $f(R)$ , modelos com dimensões extras (modelos de brana), entre outros.
- Todos esse modelos surgem como tentativa de resposta à pergunta “o que é energia escura?”.
- Nos modelos de brana, a força gravitacional seria a única das quatro forças fundamentais a interagir com a dimensão extra, o que provoca uma diluição da gravitação.
- Para os modelos de dimensão extra, que iremos tratar aqui, a quinta dimensão pode fazer o papel referente à constante cosmológica no caso da RG quadridimensional.

- 1 Introdução
- 2 O modelo gravitacional de Kaluza-Klein
- 3 Análise da cosmologia a partir do modelo de Kaluza-Klein

- Primeiramente publicada em 1921, o modelo de Kaluza-Klein mostra que a RG em cinco dimensões contém tanto a teoria gravitacional 4D de Einstein quanto a teoria do eletromagnetismo de Maxwell.
- Kaluza impôs a anulação de todas as derivadas com respeito à quinta dimensão e Klein sugeriu que isso deveria ocorrer devido à compactificação da quinta dimensão.
- Para o modelo de Kaluza-Klein, a matéria em 4D é uma manifestação geométrica do universo em 5D, assim, a equação de campo de Einstein fica

$$G_{AB} = 0. \quad (2)$$

- 1 Introdução
- 2 O modelo gravitacional de Kaluza-Klein
- 3 Análise da cosmologia a partir do modelo de Kaluza-Klein**



- O elemento de linha com que vamos trabalhar é:

$$ds^2 = dt^2 - a(t) \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2 \theta d\phi^2 \right) - \alpha(t)^2 dl^2, \quad (3)$$

em que consideramos  $c = 1$  e que a seção espacial do espaço-tempo 5D é plana ( $k = 0$ ).

- Usando as equações de campo de Einstein da RG, com a métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW), podemos obter a seguinte equação para a densidade do universo, que representa o modelo cosmológico  $\Lambda$ CDM:

$$8\pi G\rho(t) = 3 \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - \Lambda. \quad (4)$$

- Queremos obter um análogo da Equação (4) para o caso 5D, com o intento de verificar se o tratamento do universo em 5 dimensões pode, de algum modo, mimetizar os efeitos da constante cosmológica.

- Como no modelo de Kaluza-Klein o espaço-tempo em 5 dimensões é vazio, calculamos  $G_{00} = 0$ ,

$$G_0^0 = 3 \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + 3 \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{\alpha}}{\alpha}. \quad (5)$$

- A equação acima deve conter informações de matéria em seus termos.
- Vamos re-escrever a Equação (1) como

$$G_{ab} - G_{AB} = kT_{ab}. \quad (6)$$

- Em 4D, o elemento de linha (3) torna-se o elemento de linha usual de FRW, que resulta no seguinte componente (00) do tensor de Einstein

$$G_0^0 = 3 \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2. \quad (7)$$

- Com isso, (6) fica

$$8\pi G\rho(t) = -3\frac{\dot{a}}{a}\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}. \quad (8)$$

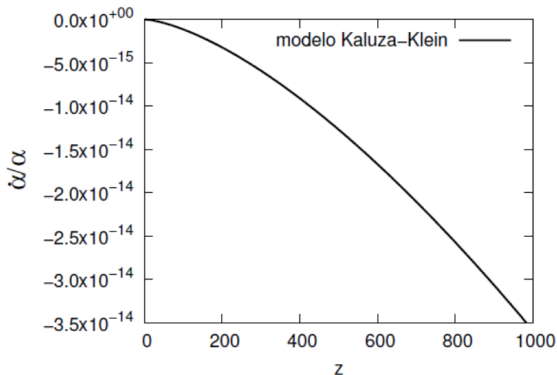
- A forma funcional de  $\alpha$  pode ser obtida igualando (8) a (4), o que significa dizer que  $\alpha(t)$  deve mimetizar os efeitos da constante cosmológica. Com isso, escrevemos

$$-3\frac{\dot{a}}{a}\frac{\dot{\alpha}}{\alpha} = 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \Lambda. \quad (9)$$

- E com certa álgebra, chegamos a

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = (1+z)\exp\left\{-\frac{\Lambda}{3H_0^2}\left[\frac{4}{3}\ln(1+z) - \frac{4}{9}\ln(z^3 + 3z^2 + 3z + 1)\right]\right\} \quad (10)$$

Na figura abaixo apresenta-se a evolução de  $\dot{\alpha}/\alpha$  do modelo Kaluza-Klein. A substituição desse resultado na Equação (8) produz uma evolução da função  $\rho(t)$  exatamente igual à produzida pelo modelo  $\Lambda$ CDM.



**Figura:** Evolução da função  $\frac{\dot{\alpha}}{\alpha_0}$ , associada com a quinta dimensão no modelo de Kaluza-Klein, com o redshift.

**FIM**