Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais

Prova de Física

Processo de Admissão para o Programa de Pós-Graduação em Astrofísica do INPE

06/12/2022

Duração: 4 horas

Nome: ____

Instruções para realização do exame:

a) a prova é individual, sem qualquer consulta;

b) não é permitido o uso de telefones celulares;

c) é permitido o uso de calculadora científica, desde que não seja um aplicativo de celular;

d) a prova poderá ser feita a lápis, mas **as respostas finais devem ser apresentadas em caneta;**

e) **escreva seu nome em cada folha de prova** e use somente um lado da folha de respostas;

f) **resolva uma questão por folha e numere as folhas**, informando o total de folhas utilizadas (ex.: no caso de 12 folhas utilizadas, ao terminar, numere as folhas em sequência 1/12, 2/12, 3/12, etc.);

g) todas as questões valem um (1,0) ponto, incluindo a questão "bônus" (11 questões no total);

h) se estiver fazendo a prova fora do INPE, use papel A4 e deixe margens de ~ 2 cm;

i) solicitamos que a prova seja enviada ao INPE por email, para os endereços eletrônicos pg.ast@inpe.br e andre.milone@inpe.br;

j) os originais devem ser enviados pelo correio, aos cuidados de André Milone, para o endereço abaixo.

INPE - Divisão de Astrofísica

Av. dos Astronautas 1758 - Prédio CEA I

Jardim da Granja - São José dos Campos, SP

Cep 12.227-010 Brasil

Exame de Admissão para a Pós-Graduação em Astrofísica - INPE - 06/Dez/2022

Instruções: Este exame consiste em 10 questões dissertativas. A "questão bônus" (ao final da prova) não é obrigatória, mas sua resolução (ou tentativa de resolução) contará ponto para a nota final. Anexamos o formulário do Exame Unificado de Física para eventual consulta.

(Mecânica) Questão 1:

Suponha que um carro esteja parado num sinal numa subida. Num determinado instante, o sinal abre e o carro acelera, ganhando velocidade e altura em relação ao nível inicial. Considere o carro como seu sistema de estudo e chame de t_A um instante correspondente a alguns segundos antes do sinal abrir e t_B um instante correspondente a alguns segundos depois do sinal abrir. Explique como se pode conciliar os princípios de conservação de energia e conservação de momento linear com o movimento do carro entre os instantes t_A e t_B, já que o sistema claramente ganhou energia mecânica e velocidade entre os dois instantes.

(Mecânica) Questão 2:

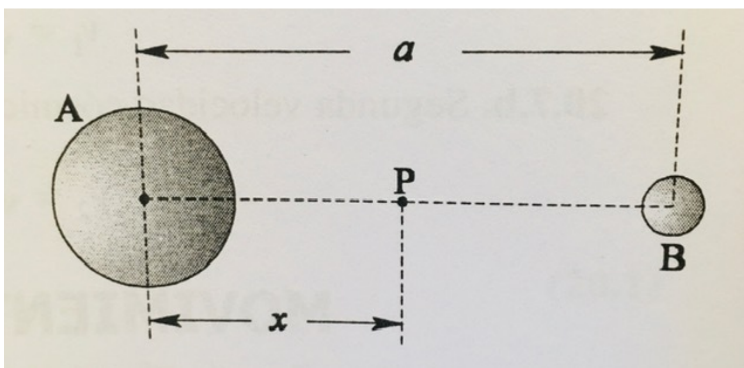
Imagine, hipoteticamente, que um engenheiro construa um tubo de vácuo perfeito que atravesse a Terra ao longo de um diâmetro da mesma. Considere um modelo simples em que a Terra é perfeitamente esférica de raio $R = 6400$ km e densidade constante $\rho = 5.5$ g cm^{-3}. Se um objeto de massa $m \ll M_T$ (onde M_T é a massa da Terra) é largado em uma das extremidades do tubo e não há qualquer atrito do objeto com as paredes do tubo, calcule: (a) o período do movimento do objeto, e (b) a velocidade do objeto ao passar pelo centro da Terra.

(Gravitação) Questão 3:

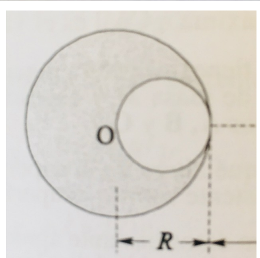
Um exoplaneta, A, possui uma lua, B (ver Fig. 1-(a)).

(a) Haverá uma distância x sobre a reta AB (no ponto P) em que a aceleração gravitacional gerada por A é a mesma gerada por B. Escreva uma expressão para x em termos das variáveis do problema. Dado: massa de A é 9 vezes a massa de B.

(b) Considere o caso em que o exoplaneta A seja na verdade um planeta artificial criado por uma civilização alienígena altamente avançada, sendo uma esfera de raio R, de densidade uniforme, mas possuindo uma cavidade esférica vazia, tal como na Fig. 1-(b). A cavidade possui raio $R/2$. Calcule a força gravitacional do planeta artificial sobre a lua B, em função da massa de B, R e a, assumindo que a cavidade se mostra sempre voltada para (mais próxima de) B. Considere os mesmos valores de massa do item (a), isto é, o planeta artificial, se não possuísse a cavidade, teria uma massa 9 vezes a massa de B.



(a)



(b)

Figura 1: Questão 3.

(Hidrodinâmica) Questão 4:

Um tubo de seção transversal A_1 possui um trecho em estrangulamento (isto é, de menor seção transversal, A_2), tal como mostrado na Fig. 2. Um fluido não compressível, de densidade ρ, atravessa o tubo com velocidades v_1 e v_2 nas regiões de seções transversais A_1 e A_2, respectivamente.

Dois manômetros, G_1 e G_2, medem a pressão no interior do tubo nos trechos A_1 e A_2, obtendo os valores p_1 e p_2, respectivamente. Obtenha uma expressão para a velocidade v_1 em termos de ρ, da diferença de pressão, $p_1 - p_2$, e da razão de áreas, A_1/A_2. *Nota:* este dispositivo para medir a velocidade de um fluido se chama "medidor de Venturi".

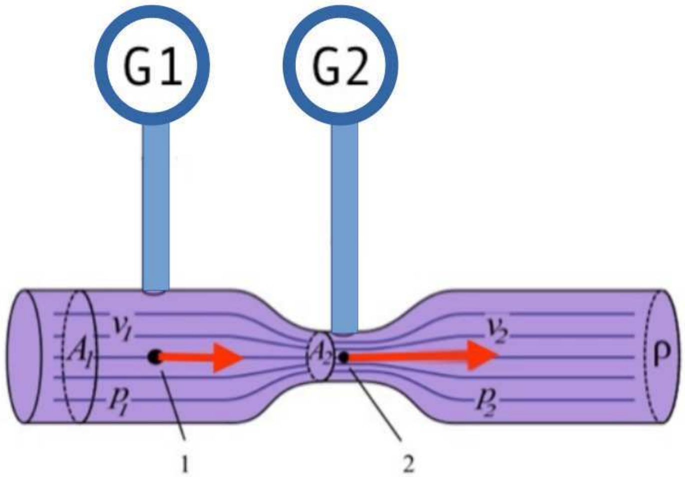


Figura 2: Questão 4.

(Eletromagnetismo) Questão 5:

As linhas de força de um campo elétrico estático, $\vec{E}$, têm a forma de arcos de círculos concêntricos (com centros em O), numa certa região delimitada pelo setor circular OA-OB, de ângulo $A\hat{O}B$ (ver Fig. 3). A forma das linhas de força na região externa a esta região não é relevante para este problema. Mostre que a razão entre as intensidades do campo elétrico, avaliadas em diferentes distâncias do centro (R e r, respectivamente), no interior do setor circular OA-OB, é dada por:

$$\frac{|\vec{E}(R)|}{|\vec{E}(r)|} \equiv \frac{E_1}{E_2} = \frac{r}{R}, \tag{1}$$

ou seja, esta razão é inversamente proporcional às respectivas distâncias ao centro O.

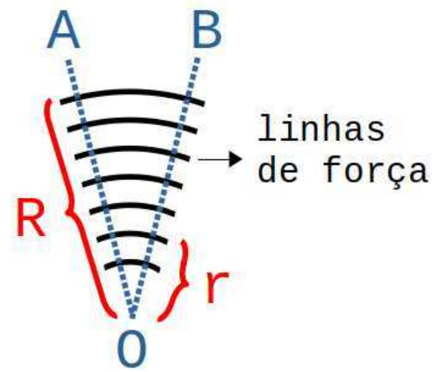


Figura 3: Questão 5.

(Eletromagnetismo) Questão 6:

Numa certa região, um campo magnético, $\vec{B}$, de módulo constante, rotaciona com uma velocidade angular dada pelo vetor $\vec{\omega}$, de módulo também constante (ver Fig. 4). Num intervalo de tempo $\mathrm{d}t$, o campo magnético se deslocou, tal que: $\mathrm{d}\vec{B} = \vec{B}(t+\mathrm{d}t) - \vec{B}(t)$. Encontre uma expressão para o rotacional do campo elétrico nesta região, $\vec{\nabla} \times \vec{E}$, em função dos vetores $\vec{B}$ e $\vec{\omega}$.

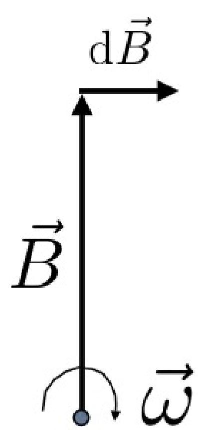


Figura 4: Questão 6.

(Termodinâmica) Questão 7:

Calcule o calor absorvido por um sistema que percorre uma trajetória circular no diagrama pressão-volume; ver Fig. 5. As unidades usadas são kPa para a pressão e cm^3 para o volume.

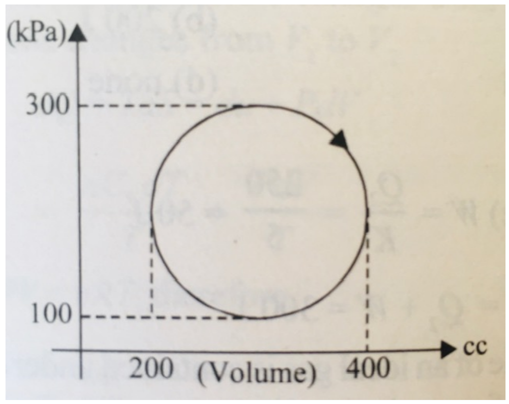


Figura 5: Questão 7.

(Ondas) Questão 8:

Três pulsos, A, B e C, de mesma amplitude, deslocam-se para a direita numa corda com uma extremidade móvel, tal como mostra a Fig. 6.

(a) Haverá ou não inversão de fase após a reflexão dos pulsos, com base na condição de contorno dada (extremidade móvel)? Explique. Descreva sequencialmente o que ocorrerá após a reflexão de cada um dos pulsos, em termos de interferências construtivas ou destrutivas.

(b) Considere agora que a extremidade da corda está fixa no poste. Haverá ou não inversão de fase? Explique.

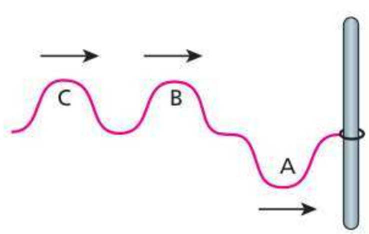


Figura 6: Questão 8.

(Física Moderna) Questão 9:

Considere a lei de Planck em termos da densidade de energia espectral:

$$u_\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{\exp(\frac{hc}{\lambda kT}) - 1}. \tag{2}$$

(a) Mostre que o máximo de u_λ pode ser obtido a partir da solução da equação transcendental dada por:

$$\exp(-x) + \frac{x}{5} - 1 = 0, \tag{3}$$

onde

$$x \equiv \frac{hc}{\lambda_{max}kT}, \tag{4}$$

sendo λ_{max} o comprimento de onda para o valor máximo de u_λ.

(b) Sugira um método para obter a solução da Eq. 3.

(Relatividade Restrita) Questão 10:

Um pequeno objeto em forma de cubo, quando observado em repouso no interior de uma nave espacial, R (considerada um referencial inercial), apresenta massa m e volume V, ver Fig. 7-(a). Este objeto é lançado no espaço profundo a partir de R, afastando-se deste referencial com uma velocidade constante, $v = 0,01c$ (1% da velocidade da luz), na direção do eixo-x, tal como medida por R; ver Fig. 7-(b). As arestas do cubo estão alinhadas com as direções dos eixos xyz do referencial R.

(a) Determine uma expressão para a diferença de massa, $\Delta m = M - m$, entre a massa do cubo viajando no espaço sideral, M, e sua massa de repouso. Mostre que, para baixas velocidades com relação à c (como ocorre neste caso), o excesso de energia, ΔE, equivalente à essa diferença de massa, pode ser escrito como:

$$\Delta E = \Delta mc^2 \approx \frac{1}{2}mv^2. \tag{5}$$

(b) Uma segunda nave espacial, S, tem velocidade nula com relação à R, encontrando-se mais adiante no espaço, ver Fig. 7-(b,c). Um observador em S utiliza um referencial cujos eixos estão alinhados exatamente com os de R, e mede o volume do cubo. Mostre que a diferença, ΔV, entre o volume medido em R (quando o cubo se encontrava em repouso no interior da nave), e aquele medido em S, pode ser aproximada por:

$$\Delta V \approx -\frac{\Delta m}{m} V. \tag{6}$$

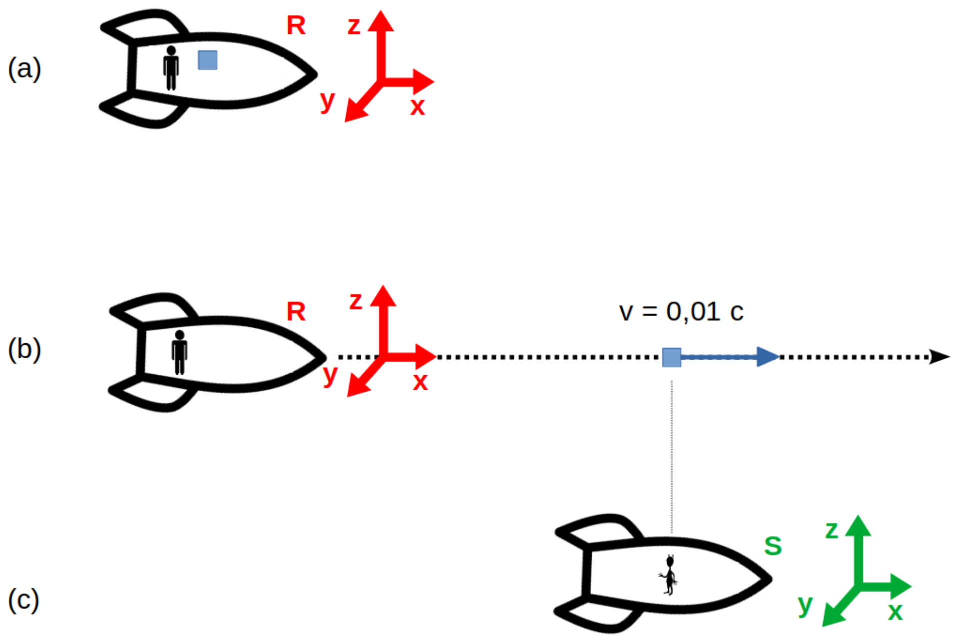


Figura 7: Questão 10.

Questão Bônus:

O filósofo e astrônomo grego Seleuco de Selêucia (190 a.C. - 150 a.C.) parece ter sido o primeiro a formular uma explicação qualitativa correta, embora simplificada, para a origem das marés. A partir do *Principia*, de Isaac Newton (1642 - 1727), foi possível tratar a teoria das marés de maneira detalhada.

Questão: Por que nas marés os oceanos sobem não só na face da Terra voltada para a Lua como também na face oposta?

Desconsidere efeitos secundários, como por exemplo, a rotação da Terra, e a presença do Sol (e qualquer efeito que ele possa causar).

Constantes físicas

Velocidade da luz no vácuo	$c = 3{,}00{\times}10^{8}$ m/s
Constante de Planck	$h = 6{,}63{\times}10^{-34}$ J s $= 4{,}14{\times}10^{-15}$ eV s
	$\hbar = h/2\pi = 1{,}06{\times}10^{-34}$ J s $= 6{,}58{\times}10^{-16}$ eV s
	$hc \simeq 1240$ eV nm $= 1240$ MeV fm
	$\hbar c \simeq 200$ eV nm $= 200$ MeV fm
Constante de Wien	$W = 2{,}898{\times}10^{-3}$ m K
Permeabilidade magnética do vácuo	$\mu_0 = 4\pi{\times}10^{-7}$ N/A^2 $= 12{,}6{\times}10^{-7}$ N/A^2
Permissividade elétrica do vácuo	$\epsilon_0 = \dfrac{1}{\mu_0 c^2} = 8{,}85{\times}10^{-12}$ F/m
	$\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8{,}99{\times}10^{9}$ Nm^2/C^2
Constante gravitacional	$G = 6{,}67{\times}10^{-11}$ N m^2/kg^2
Carga elementar	$e = 1{,}60{\times}10^{-19}$ C
Massa do elétron	$m_\mathrm{e} = 9{,}11{\times}10^{-31}$ kg $= 511$ keV/c^2
Comprimento de onda Compton	$\lambda_\mathrm{C} = 2{,}43{\times}10^{-12}$ m
Massa do próton	$m_\mathrm{p} = 1{,}673{\times}10^{-27}$ kg $= 938$ MeV/c^2
Massa do nêutron	$m_\mathrm{n} = 1{,}675{\times}10^{-27}$ kg $= 940$ MeV/c^2
Massa do dêuteron	$m_\mathrm{d} = 3{,}344{\times}10^{-27}$ kg $= 1876$ MeV/c^2
Massa da partícula α	$m_\alpha = 6{,}645{\times}10^{-27}$ kg $= 3727$ MeV/c^2
Constante de Rydberg	$R_H = 1{,}10{\times}10^{7}$ m^{-1} , $\quad hcR_H = 13{,}6$ eV
Raio de Bohr	$a_0 = 5{,}29{\times}10^{-11}$ m
Constante de Avogadro	$N_\mathrm{A} = 6{,}02{\times}10^{23}$ mol^{-1}
Constante de Boltzmann	$k_\mathrm{B} = 1{,}38{\times}10^{-23}$ J/K $= 8{,}62{\times}10^{-5}$ eV/K
Constante universal dos gases	$R = 8{,}31$ J mol^{-1} K^{-1}
Constante de Stefan-Boltzmann	$\sigma = 5{,}67{\times}10^{-8}$ W m^{-2} K^{-4}

Raio do Sol	=	$6{,}96{\times}10^{8}$ m	Massa do Sol	=	$1{,}99{\times}10^{30}$ kg
Raio da Terra	=	$6{,}37{\times}10^{6}$ m	Massa da Terra	=	$5{,}98{\times}10^{24}$ kg
Distância Sol-Terra	=	$1{,}50{\times}10^{11}$ m			

1 J $= 10^{7}$ erg $\qquad$ 1 eV $= 1{,}60{\times}10^{-19}$ J $\qquad$ 1 Å $= 10^{-10}$ m $\qquad$ 1 fm $= 10^{-15}$ m

Constantes numéricas

$\pi \cong 3{,}142$	$\ln 2 \cong 0{,}693$	$\cos(30°) = \sin(60°) = \sqrt{3}/2 \cong 0{,}866$		
$\mathrm{e} \cong 2{,}718$	$\ln 3 \cong 1{,}099$	$\sin(30°) = \cos(60°) = 1/2$		
$1/\mathrm{e} \cong 0{,}368$	$\ln 5 \cong 1{,}609$	$\mathrm{e}^2 \cong 7{,}39$	$\mathrm{e}^3 \cong 20{,}1$	$\mathrm{e}^4 \cong 54{,}6$
$\log_{10}\mathrm{e} \cong 0{,}434$	$\ln 10 \cong 2{,}303$	$\mathrm{e}^5 \cong 148$	$\mathrm{e}^6 \cong 403$	

Regras de propagação de incertezas

Se a incerteza de X é σ_X (ou seja, medidas de X são dadas como $X \pm \sigma_X$), então

$$F = f(a,b) \Rightarrow \sigma_F = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b}\right)^2 \sigma_b^2}$$

$$S = a + b,\ D = a - b \Rightarrow \sigma_S = \sigma_D = \sqrt{\sigma_a^2 + \sigma_b^2}$$

$$P = ab,\ Q = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{\sigma_P}{P} = \frac{\sigma_Q}{Q} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_b}{b}\right)^2}$$

Mecânica Clássica

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \qquad \mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t}$$

$$\mathbf{r} = r\hat{\mathrm{e}}_r \qquad \mathbf{v} = \dot{r}\hat{\mathrm{e}}_r + r\dot{\theta}\hat{\mathrm{e}}_\theta \qquad \mathbf{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{\mathrm{e}}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\hat{\mathrm{e}}_\theta$$

$$\mathbf{r} = \rho\hat{\mathrm{e}}_\rho + z\hat{\mathrm{e}}_z \qquad \mathbf{v} = \dot{\rho}\hat{\mathrm{e}}_\rho + \rho\dot{\varphi}\hat{\mathrm{e}}_\varphi + \dot{z}\hat{\mathrm{e}}_z \qquad \mathbf{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2\right)\hat{\mathrm{e}}_\rho + \left(\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}\right)\hat{\mathrm{e}}_\varphi + \ddot{z}\hat{\mathrm{e}}_z$$

$$\mathbf{r} = r\hat{\mathrm{e}}_r \qquad \mathbf{v} = \begin{aligned}&\dot{r}\hat{\mathrm{e}}_r + r\dot{\theta}\hat{\mathrm{e}}_\theta \\ &+ r\dot{\varphi}\sin\theta\,\hat{\mathrm{e}}_\varphi\end{aligned} \qquad \mathbf{a} = \begin{aligned}&\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right)\hat{\mathrm{e}}_r \\ &+ \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\right)\hat{\mathrm{e}}_\theta \\ &+ \left(r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta\right)\hat{\mathrm{e}}_\varphi\end{aligned}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} + u = -\frac{m}{L^2u^2}F\left(1/u\right), \quad u = \frac{1}{r}; \qquad \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + u^2 = \frac{2m}{L^2}\left[E - V(1/u)\right]$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad L = T - V \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \qquad p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$$

$$Q_k = \sum_{i=1}^{N} F_{ix}\frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_{iy}\frac{\partial y_i}{\partial q_k} + F_{iz}\frac{\partial z_i}{\partial q_k} \qquad Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}\right)_{\text{fixo}} = \left(\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}\right)_{\text{rotação}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{rotação}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}$$

$$H = \sum_{k=1}^{f} p_k\dot{q}_k - L; \qquad \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}; \qquad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}; \qquad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

$$E = T + V = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}|^2 + V(\mathbf{r}) \qquad \mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{r})$$

Eletromagnetismo

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = \rho/\epsilon_0 \qquad \nabla\cdot\mathbf{D} = \rho_F$$

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \qquad \nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0 \qquad \nabla\cdot\mathbf{B} = 0$$

$$\nabla\times\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{J} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \qquad \nabla\times\mathbf{H} = \mathbf{J}_F + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}) \qquad d\mathbf{F} = I d\mathbf{l}\times\mathbf{B}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{P} = -\rho_P \qquad \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{n}} = \sigma_P \qquad \rho = \rho_F + \rho_P$$

$$\nabla\times\mathbf{M} = \mathbf{J}_M \qquad \mathbf{M}\times\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{K}_M \qquad \mathbf{J} = \mathbf{J}_F + \mathbf{J}_M + \frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon\mathbf{E} \qquad \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu\mathbf{H}$$

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{\mathrm{e}}_r}{r^2} \qquad V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} \qquad \mathbf{E} = -\nabla V \qquad V = -\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$$

$$\mathbf{F}_{2\to1} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0}\frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} \qquad U_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$$

$$V(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left[A_l r^l + \frac{B_l}{r^{(l+1)}}\right] P_l(\cos\theta) \qquad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')\times(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'$$

$$\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A} \qquad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

$$u = \frac{\epsilon_0}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{E} + \frac{1}{2\mu_0}\mathbf{B}\cdot\mathbf{B} \qquad \mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}\times\mathbf{B} \qquad I = I_0\cos^2\theta \;\; \text{(lei de Malus)}$$

$$Q = CV \qquad Q(t) = Q(0)e^{-t/RC} \;\; \text{(carga no circuito RC ao descarregar)}$$

Relatividade

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \qquad x' = \gamma\,(x - Vt) \qquad t' = \gamma\left(t - Vx/c^2\right)$$

$$v_x' = \frac{v_x - V}{1 - Vv_x/c^2} \qquad v_y' = \frac{v_y}{\gamma\,(1 - Vv_x/c^2)} \qquad v_z' = \frac{v_z}{\gamma\,(1 - Vv_x/c^2)}$$

$$E = \gamma m_0 c^2 \qquad \mathbf{p} = \gamma m_0\mathbf{V} \qquad E = \sqrt{(pc)^2 + (m_0c^2)^2}$$

Mecânica Quântica

$$i\hbar\,\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t} = \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x)\Psi(x,t) \qquad \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

$$p_x = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x} \qquad [x,p_x] = i\hbar$$

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} + i\frac{\hat{p}}{m\omega}\right) \qquad \hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle\ , \qquad \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

$$L_\pm = L_x \pm iL_y \qquad L_\pm Y_{\ell m}(\theta,\varphi) = \hbar\sqrt{l(l+1)-m(m\pm 1)}\ Y_{\ell m\pm 1}(\theta,\varphi)$$

$$L_z = x\,p_y - y\,p_x \qquad L_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}\ , \qquad [L_x,L_y] = i\hbar L_z$$

$$E_n^{(1)} = \langle n|\delta H|n\rangle \qquad E_n^{(2)} = \sum_{m\neq n}\frac{|\langle m|\delta H|n\rangle|^2}{E_n^{(0)}-E_m^{(0)}}\ , \qquad \phi_n^{(1)} = \sum_{m\neq n}\frac{\langle m|\delta H|n\rangle}{E_n^{(0)}-E_m^{(0)}}\phi_m^{(0)}$$

$$\hat{\mathbf{S}} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma} \qquad \sigma_x = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\ ,\quad \sigma_y = \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\ ,\quad \sigma_z = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$\bar{\psi}(\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int d^3r\, e^{-i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar}\,\psi(\vec{r}) \qquad \psi(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int d^3p\, e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar}\,\bar{\psi}(\vec{p})$$

$$e^{\hat{A}} \equiv \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\hat{A}^n}{n!}$$

Física Moderna

$$p = \frac{h}{\lambda} \qquad E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \qquad E_n = -\frac{Z^2}{n^2}\,\frac{m_e e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 2\hbar^2} = -\frac{Z^2}{n^2}\,hcR_H = -Z^2\,\frac{13{,}6}{n^2}\text{eV}$$

$$L = mvr = n\hbar \qquad a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e^2} \qquad R_T = \sigma T^4 \qquad \lambda_{\max}T = W$$

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c}(1-\cos\theta) \quad n\lambda = 2d\sin\theta_n \qquad \Delta x\ \Delta p \geq \hbar/2 \qquad \Delta E\ \Delta t \geq \hbar/2$$

$$f = f_0\sqrt{\frac{1-V/c}{1+V/c}} \qquad \text{(fonte e detector se afastando)}$$

Termodinâmica e Mecânica Estatística

$dU = dQ - dW \qquad dU = TdS - pdV + \mu dN$

$dF = -SdT - pdV + \mu dN \qquad dH = TdS + Vdp + \mu dN$

$dG = -SdT + Vdp + \mu dN \qquad d\Phi = -SdT - pdV - Nd\mu$

$F = U - TS \qquad G = F + pV$

$H = U + pV \qquad \Phi = F - \mu N$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_{S,N} = -\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_{V,N} \qquad \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{T,N} = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{V,N}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_{S,N} = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_{p,N} \qquad \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_{T,N} = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{p,N}$$

$$p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{T,N} \qquad S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{V,N}$$

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{V,N} = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{V,N} \qquad C_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_{p,N} = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{p,N}$$

eficiência $= |W/Q_{\text{quente}}|$ coef. de desempenho $= |Q_{\text{frio}}/W|$

eficiência de Carnot $= 1 - T_{\text{frio}}/T_{\text{quente}}$ coef. de desemp. de Carnot $= T_{\text{frio}}/(T_{\text{quente}} - T_{\text{frio}})$

Gás ideal: $pV = nRT$, $U = C_V T = nc_V T$,
Processo adiabático: $pV^\gamma = \text{const.}$, $\gamma = c_p/c_V = (c_V + R)/c_V$

$$\text{condutividade térmica} = \frac{|\text{densidade de corrente de calor}|}{|\nabla T|}$$

$$S = k_B \ln[\Omega(E,V,N)] \qquad \frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_{V,N} \qquad \frac{p}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{N,E} \qquad \frac{\mu}{T} = -\left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{E,V}$$

$$Z_N = \int \frac{\prod_i d^3p_i d^3r_i}{h^{3N}N!} e^{-\beta H[\{\mathbf{p}_i,\mathbf{r}_i\}]} \qquad Z_N = \sum_n e^{-\beta E_n} \qquad \beta = 1/k_B T$$

$$F = -k_B T \ln Z_N \qquad U = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z_N \qquad S = \frac{\partial}{\partial T}\left(k_B T \ln Z_N\right) \qquad M = -\frac{\partial F}{\partial h}$$

Resultados matemáticos

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} \mathrm{e}^{-ax^2} \mathrm{d}x = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n{+}1)}{(2n{+}1)2^n a^n} \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (n = 0{,}1{,}2,\ldots)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad (|x|<1) \qquad\qquad \mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^{1/2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) \qquad\qquad \ln N! \cong N\ln N - N$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{\left(a^2\sqrt{x^2+a^2}\right)} \qquad\qquad \int \frac{x^2\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) - \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \qquad\qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{x(x-1)} = \ln(1-1/x)$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\,\arctan\frac{x}{a} \qquad\qquad \int \frac{x}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\,\ln(a^2+x^2)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{z^{x-1}}{e^z+1}\,dz = (1-2^{1-x})\,\Gamma(x)\,\zeta(x) \qquad (x>0)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{z^{x-1}}{e^z-1}\,dz = \Gamma(x)\,\zeta(x) \qquad (x>1)$$

$$\Gamma(2) = 1 \qquad \Gamma(3) = 2 \qquad \Gamma(4) = 6 \qquad \Gamma(5) = 24 \qquad \Gamma(n) = (n-1)!$$

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \cong 1{,}645 \qquad \zeta(3) \cong 1{,}202 \qquad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90} \cong 1{,}082 \qquad \zeta(5) \cong 1{,}037$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\ \sin(nx)\ dx = \pi\delta_{m,n} \qquad\qquad \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\ \cos(nx)\ dx = \pi\delta_{m,n}$$

$$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z \qquad\qquad \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = r^2\mathrm{d}r\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$$

$$Y_{0,0} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \qquad Y_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta \qquad Y_{1,\pm1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\mathrm{e}^{\pm i\phi}$$

$$Y_{2,0} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}\left(3\cos^2\theta - 1\right) \qquad Y_{2,\pm1} = \mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta\mathrm{e}^{\pm i\phi} \qquad Y_{2,\pm2} = \mp\sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta\mathrm{e}^{\pm 2i\phi}$$

$$P_0(x) = 1 \qquad P_1(x) = x \qquad P_2(x) = (3x^2-1)/2$$

$$\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{V}) = 0 \qquad\qquad \nabla\times\nabla f = 0$$

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{V}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{V}) - \nabla^2\mathbf{V}$$

$$\oint \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \int (\nabla\cdot\mathbf{A})\,\mathrm{d}V \qquad\qquad \oint \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} = \int (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}$$

Coordenadas cartesianas

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{\mathrm{e}}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{\mathrm{e}}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{\mathrm{e}}_z$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\mathrm{e}}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\mathrm{e}}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathrm{e}}_z \qquad \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Coordenadas cilíndricas

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right]\hat{\mathrm{e}}_\rho + \left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right]\hat{\mathrm{e}}_\varphi + \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi}\right]\hat{\mathrm{e}}_z$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\hat{\mathrm{e}}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{\mathrm{e}}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathrm{e}}_z \qquad \nabla^2 f = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Coordenadas esféricas

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(A_\varphi)}{\partial \varphi}$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}\right]\hat{\mathrm{e}}_r$$

$$+ \left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}\right]\hat{\mathrm{e}}_\theta + \left[\frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right]\hat{\mathrm{e}}_\varphi$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{\mathrm{e}}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\mathrm{e}}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{\mathrm{e}}_\varphi$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$