Curso de pós–graduação em Astrofísica
Prova de admissão

1. O menor ângulo sob o qual o olho humano consegue visualizar dois pontos é da ordem de 1' (um minuto de arco). Esse ângulo recebe o nome de *ângulo de acuidade visual.* Sabendo–se que a distância Terra—Lua é da ordem de 380.000 km, pergunta-se: qual mínima distância deve separar dois pontos sobre a superfície lunar para que estes sejam distingüíveis por um observador na Terra?

2. Em um tubo de raios catódicos de um televisor as placas paralelas de deflexão vertical têm espaçamento de 57 mm ao longo da direção de um feixe de elétrons incidente. O módulo do campo elétrico entre essas placas é de 280 N/C e os elétrons entram no campo defletor com uma velocidade de $2,9 \times 10^6$ m/s. Qual é o ângulo de deflexão do feixe após as placas?

3. Duas esferas A e B de massas $m_A = 5\,\mathrm{g}$ e $m_B = 10\,\mathrm{g}$ têm cargas $q_A = 2,5\,\mu\mathrm{C}$ e $q_B = 5,0\,\mu\mathrm{C}$. As esferas são ligadas por um fio não-condutor, de massa desprezível e comprimento $d = 0,3\,\mathrm{m}$, que é muito maior que o raio das esferas. (a) Suponha que se corte o fio. Neste instante, qual é o módulo da aceleração de cada esfera? (b) Muito tempo depois de ter-se cortado o fio, qual é o módulo da velocidade de cada esfera?

4. O núcleo de ^{8}Be é instável e decai espontâneamente em dois núcleos de ^{4}He. Pergunta-se:

a) Se as massas de repouso dos elementos são $m_{Be} = 8,005308\,\mathrm{u.m.a.}$ e $m_{He} = 4,002603\,\mathrm{u.m.a.}$, então quanta energia de massa de repouso é convertida no decaimento?

b) Em um referencial no qual o núcleo de ^{8}Be está inicialmente em repouso, qual é a energia cinética que cada núcleo de ^{4}He tem após estarem bastante separados?

c) Qual é a velocidade de cada núcleo de ^{4}He?

d) Qual é o módulo do momento de cada núcleo de ^{4}He?

5. A meia vida de um nêutron livre é de 1.000 s em seu referencial de repouso. Estime a meia vida dessa partícula em um referencial no qual sua velocidade é dada por:

a) 0,99 c

b) 0,10 c

6. Uma partícula move-se ao longo de uma curva cujas equações paramétricas são

$$x = e^{t}$$

$$y = 2\,cos(3t)$$

$$z = 2\,sen(3t)$$

onde t é o tempo. Pede-se:

a) determinar sua velocidade e aceleração em um instante qualquer;

b) achar o valor absoluto da velocidade e da aceleração para $t = 0$.

7. Partindo das equações de Maxwell,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

deduza a equação da onda eletromagnética.

8. Estime a potência total irradiada (taxa de emissão de energia eletromagnética) por seu corpo. Admita que seu corpo se comporte como um corpo negro e que a temperatura seja (estável) de 37° C.

9. Um paraquedista caindo passa no instante $t = 0$ por $z = 0$ com velocidade v_0. Sabe-se que a aceleração do paraquedista é dada por $\ddot{z} = g - b\,v$, onde v é sua velocidade e b uma constante que depende da resistência do ar Pede-se mostrar que a aceleração do paraquedista em função do tempo é dada por:

$$\ddot{z} \;=\; (g \;-\; b\,v_0)\;e^{-bt}$$

10. Uma possibilidade para produzir energia elétrica consiste no funcionamento de um motor térmico operando entre a superfície e a profundeza do oceano. Suponha que as temperaturas envolvidas sejam de, respectivamente, 25° C e 10° C. Pede-se:

a) Estime a eficiência de tal motor;

b) Se o trabalho deve ser realizado à taxa de 2 MW, a que taxa deve-se extrair calor da superfície da água?

Dado: eficiência de motores térmicos $\longrightarrow \;\; \eta \; = \; \mathrm{W}_{\text{ciclo}} \,/\, \mathrm{Q}_A$

onde W_{ciclo} é o trabalho realizado em um ciclo de funcionamento do motor e Q_A é a quantidade de calor do segmento de temperatura mais elevada.

11. Prove que a soma dos ângulos internos de um triângulo arbitrário no plano é de 180°.

Constantes úteis

$\gamma \;=\; \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$

$q_{e^-} \;=\; 1,60 \times 10^{-19}\,\mathrm{C} \;=\; 4,80 \times 10^{-10}\,\mathrm{esu}$

$k_0 = 9,0 \times 10^9\ \mathrm{N\,m^2\,C^{-2}}$

$\text{u.m.a.} = \; 1,6605 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$

$c \;=\; 3 \times 10^8\ \mathrm{m/s}$

$m_{e^-} \;=\; 9,11 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$

$\sigma \;=\; 5,67{\times}10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}} \;=\; 5,67{\times}10^{-5}\,\mathrm{erg\,cm^{-2}\,K^{-4}}$

GABARITO

1.

$\alpha = 1' = \left(\frac{1}{60}\right)^o$; $d = 380.000$ km; $\overline{AB} =$?

$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\overline{AB}}{2d} \quad \Longrightarrow \quad \overline{AB} = 2d\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad \therefore$ $\overline{AB} \approx 110$km

2.

$\vec{F} = q\vec{E}$ (1); $\vec{F} = m\vec{a}$ (2).

$(1) = (2) \quad \Longrightarrow \quad a_y = \frac{qE}{m}$.

Integrando:

$v_y = \int_o^t a_y dt' \quad \Longrightarrow \quad v_y = \frac{qE}{m}t$ (3) $\quad \Longrightarrow$ $y = \int_o^t v_y dt' \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{qe}{2m}t^2$ (4).

De (3) e (4):

$v_y^2 = \frac{2qE}{m}y$ (5).

Como $v_x = v_0$, temos

$x = \int_o^t v_x dt' = v_0 t$ (6).

De (4) e (6):

$y = \frac{1}{2}\frac{qE}{mv_0^2}$ (7).

Substituindo-se (7) em (5):

$v_y = \frac{qE}{mv_0}x$.

Para x = 57 mm

$v_y = 9,66 \times 10^5$ m/s.

O ângulo de deflexão vale então:

$\theta = \arctan\left(\frac{v_y}{v_x}\right) \qquad \therefore \qquad \theta \approx 18,4^o.$

3.

a) O módulo da força eletrostática é dado por

$F = k_0\frac{|q_A q_B|}{r^2}$

Fazendo uso da 2^a Lei de Newton, segue que:

$F = k_0\frac{|q_A q_B|}{r^2} = m_A a_A = m_B a_B$

$\therefore \quad a_A = 250\, m/s^2$ e $a_B = 125\, m/s^2$.

b) A energia eletrostática é dada por

$U = k_0 \frac{q_A q_B}{r}$.

Usando a lei da conservação da energia, e fazendo $r \to \infty$, segue que:

$k_0 \frac{q_A q_B}{r_0} = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2$.

Como as esferas saem do repouso e $a_A = 2a_B$ $\Rightarrow v_A = 2v_B$

$\therefore \quad v_A = 10\, m/s$ e $v_B = 5\, m/s$.

4.

a) $\Delta m = m_{Be} - m_{He} = 1,02$ u.m.a.

b) $\Delta E = \frac{\Delta m}{2} c^2 = 7,62 \times 10^{-15}\,\mathrm{J}$

c) $E = \frac{1}{2} m v^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2E}{m}} \quad \therefore \quad v \approx 1,51 \times 10^6 \mathrm{m/s}$.

d) $p = mv \quad \therefore \quad p = 1,0 \times 10^{-20}\,\mathrm{kg\,m\,s^{-1}}$

5.

a) $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$.

Para $\quad v/c = 0,99 \quad \Rightarrow \quad \gamma = 7,09$.

Mas $\quad \Delta t = \Delta\tau\,\gamma \quad \therefore \quad \Delta t \approx 7.090\,\mathrm{s}.$

b) Para $\quad v/c = 0,10 \quad \Rightarrow \quad \gamma = 1,005 \quad \therefore$ $\Delta t \approx 1.005\,\mathrm{s}.$

6.

a) $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ e $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$.

Sendo $\quad \vec{r} = e^t\,\vec{i} + 2\,cos(3t)\,\vec{j} + 2\,sen(3t)\,\vec{k}$

$\Rightarrow \quad \vec{v} = -e^t\,\vec{i} - 6\,sen(3t)\,\vec{j} + 6\,cos(3t)\,\vec{k}$ $\quad$ e $\quad$ $\vec{a} = e^t\,\vec{i} - 18\,cos(3t)\,\vec{j} - 18\,sen(3t)\,\vec{k}.$

b) Para $t = 0$

$\vec{v} = -\vec{i} + 6\vec{k} \quad \therefore \quad v = \sqrt{37}.$

$\vec{a} = \vec{i} - 18\vec{j} \quad \therefore \quad a = \sqrt{325}.$

7.

As equações de Maxwell para o vácuo são dadas por

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \qquad (1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad (2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad (3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (4)$$

Faça o rotacional da equação (4). Daí$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\frac{\partial \vec{\nabla} \times \vec{B}}{\partial t}$

Usando a equação (3)

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Lembrando que:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \vec{\nabla}^2 \vec{E}$$

(em coordenadas cartezianas).

Usando também a equação (1), segue que

$$\vec{\nabla}^2\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

(equação de onda) onde

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}.$$

Uma equação idêntica vale para $\vec{B}$.

8. Para um corpo negro: $P = A\,\sigma\,T^4$, onde "A" a área da superfície emissora. Considere que uma pessoa pode ser descrita "geometricamente" por um cilindro, cuja área lateral é $A = 2\pi r h$. Considerando uma pessoa de 170 cm e caixa toráxica de 80 cm (ou seja, $r \approx$ 13cm), segue que $A \approx 1,4\text{m}^2$. Tomando uma temperatura de 37^{o}C (i.e., 310 K), segue que:

$$P = 1,4\,.\,5,67\times10^{-8}\,.\,(310)^4 \quad \therefore \quad P \approx 733\text{W}.$$

9.

Como

$\ddot{z} = \frac{dv}{dt} = g - bv$

$\Rightarrow \frac{dv}{g-bv} = dt$

Integrando

$\int_{v_0}^{v} \frac{dv'}{g-bv'} = \int_0^t dt' \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{b}\ln\left(\frac{g-bv}{g-bv_0}\right) = t \quad \Rightarrow$ $g - bv = (g - bv_0)e^{-bt}$

Derivando com relação ao tempo

$\ddot{z} = (g - bv_0)e^{-bt}$.

10.

a) $\eta = \frac{W_{\text{ciclo}}}{Q_{\text{A}}} = \frac{Q_{\text{A}}-Q_{\text{B}}}{Q_{\text{A}}} = 1 - \frac{Q_{\text{A}}}{Q_{\text{B}}} = 1 - \frac{T_{\text{A}}}{T_{\text{B}}}$

Com $T_{\text{A}} = 25 + 273 = 298K$; $T_{\text{B}} = 10 + 273 = 283K$

$\Rightarrow \quad \eta = 1 - \frac{283}{295} \quad \therefore \quad \eta \approx 5\%$.

b) $0,05 = \frac{W_{\text{ciclo}}}{Q_{\text{A}}} \quad \Rightarrow \quad Q_{\text{A}} = \frac{2\text{MW}}{0{,}05} \quad \therefore \quad Q_{\text{A}} =$ 40MW.