



# Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais

Exame de admissão para o programa de pós-graduação em Astrofísica

---

23 de julho de 2020

Duração: 4h00

Nome: \_\_\_\_\_

Instruções para realização do exame:

- a) A prova é individual, sem qualquer consulta
- b) Não é permitido o uso de telefones celulares
- c) É permitido o uso de calculadoras, desde que não sejam um aplicativo de celular
- d) As fórmulas e constantes físicas necessárias à resolução serão fornecidas juntamente com o exame
- e) A prova poderá ser feita a lápis, mas **as respostas devem ser escritas com caneta azul ou preta**
- f) **Escreva seu nome em cada folha de prova** e use somente um lado da folha de respostas
- g) **Resolva uma questão por folha e numere as folhas**, de forma a informar o total de folhas utilizadas (ex.: no caso de 12 folhas utilizadas, ao terminar, numere as folhas em sequência 1/12, 2/12, 3/12, etc.)
- h) Todas as questões valem um (1.0) ponto, incluindo a questão “bônus”
- i) Se estiver fazendo a prova **fora do INPE**, use papel A4 e deixe margens de ~ 2 cm.
- j) Solicitamos que a prova seja enviada ao INPE por email, para o endereço eletrônico [pg.ast@inpe.br](mailto:pg.ast@inpe.br).
- k) Os originais devem ser enviados pelo correio para o endereço

Claudia Vilega Rodrigues

INPE - Divisão de Astrofísica

Av. dos Astronautas 1758 - Prédio CEA Novo

Jardim da Granja - São José dos Campos, SP

---

EXAME DE ADMISSÃO PARA A PÓS-GRADUAÇÃO  
EM ASTROFÍSICA - INPE - JUL/2020

(Mecânica / Gravitação) Questão 1:

Um objeto cósmico  $A$ , de massa  $m_A$ , se desloca na direção do Sol com uma velocidade  $v_0$  (quando ainda muito distante do Sol). Seja  $p$  o parâmetro de impacto (ver Fig. 1).

- (a) Determine uma expressão para distância mínima ao Sol atingida pelo objeto.
- (b) Qual será a distância mínima atingida por um objeto de massa duas vezes maior?

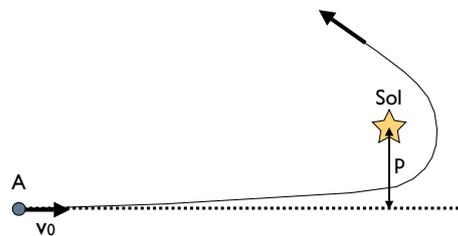


Figura 1: Questão 1.

(Mecânica) Questão 2:

Num certo instante, afastou-se ligeiramente um corpo  $A$ , de dimensões desprezíveis, que se encontrava imóvel no topo de uma esfera lisa e fixa, de raio  $R$  (ver Fig. 2). O corpo  $A$  começou então a deslizar sobre a esfera. Encontre o ângulo  $\theta$  correspondente ao ponto no qual o corpo se desprende da esfera, assim como uma expressão para a velocidade na qual ele se desprende da mesma.

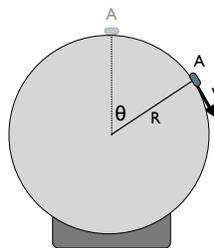


Figura 2: Questão 2.

**(Termodinâmica) Questão 3:**

Num dado processo quase estático, a temperatura de uma substância depende de sua entropia na forma:  $T = aS^n$ , onde  $a$  e  $n$  são constantes.

- (a) Encontre a capacidade térmica  $C$  desta substância como função de  $S$ .
- (b) Qual é a unidade no SI para  $C$ ?
- (c)  $C$  é uma propriedade extensiva ou intensiva? Explique.
- (d) Encontre a condição para que  $C < 0$ .
- (e) Qual a interpretação física para um sistema com  $C < 0$ ?

**(Teoria Cinética dos Gases) Questão 4:**

A função de distribuição (FD) de velocidades de Maxwell fornece a fração das partículas de um gás ideal, na temperatura  $T$ , composto por moléculas de massa  $m$ , que possuem velocidades, em módulo, num intervalo infinitesimal  $dv$ , centrado em  $v$ , e é dada por:

$$f(v)dv = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} 4\pi v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv, \quad (1)$$

onde  $k$  é a constante de Boltzmann.

- (a) Encontre a FD das moléculas em termos de suas energias cinéticas,  $\epsilon$ , isto é,  $f(\epsilon)d\epsilon$ .
- (b) Qual é a energia cinética mais provável,  $\epsilon_p$ ? Ela corresponde à energia cinética associada à velocidade mais provável, isto é,  $\epsilon_p = \epsilon(v_p)$ ?

**Dado:** A velocidade mais provável,  $v_p$ , da FD de velocidades de Maxwell, é dada por:

$$v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}}. \quad (2)$$

**(Eletromagnetismo) Questão 5:**

No interior de um cilindro circular infinitamente longo, carregado uniformemente, com carga volumétrica  $\rho$ , há uma cavidade cilíndrica circular (ver Fig. 3). A distância entre os eixos do cilindro e da cavidade é igual a  $\vec{d}$ . Encontre a intensidade do campo elétrico  $\vec{E}$  no interior da cavidade como função de  $\vec{d}$ .

**Dica:** Use o princípio da superposição do campo  $\vec{E}$ .

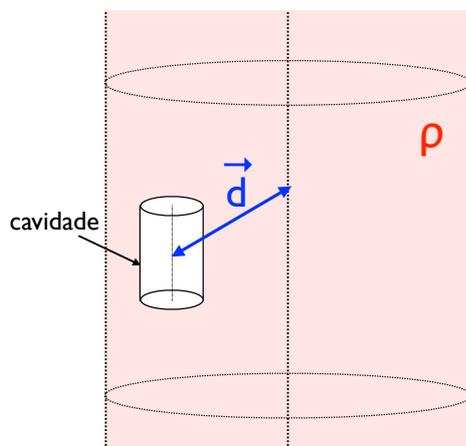


Figura 3: Questão 5.

**(Eletromagnetismo) Questão 6:**

Um feixe de partículas, com carga  $q$  cada, penetra numa região onde se encontra um campo elétrico  $\vec{E}$ , uniforme e direcionado para baixo, de valor  $|\vec{E}| = 80 \text{ kV/m}$  (ver Fig. 4). Perpendicular à  $\vec{E}$  e direcionado para o interior da página, há um campo magnético com valor  $|\vec{B}| = 0.4 \text{ T}$ .

(a) Se a velocidade das partículas for escolhida de forma apropriada, elas não serão desviadas pelos campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ . Determine essa velocidade, como função dos campos elétrico e magnético, para o caso em que a carga  $q$  é positiva e para  $q$  negativa.

(b) Dadas as unidades dos campos elétrico e magnético, no SI, como elas resultam em unidades de metro/segundo para a velocidade?

**Dica:** Utilize a Força de Lorentz.

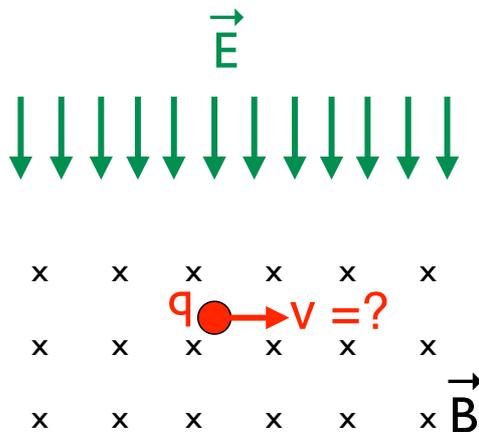


Figura 4: Questão 6.

**(Eletromagnetismo / Ondas) Questão 7:**

Uma onda eletromagnética plana,  $\vec{E} = \vec{E}_m \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$ , propaga no vácuo.

(a) Qual a relação entre o campo magnético  $\vec{B}$  e o campo magnético auxiliar  $\vec{H}$  para este caso? Escreva esta relação de tal forma que as únicas constantes que aparecem são:  $\vec{E}_m$ , a velocidade da luz,  $c$ , o número de onda,  $\vec{k}$ , e a permissividade elétrica do vácuo,  $\epsilon_0$ .

(b) Assumindo que os vetores  $\vec{E}_m$  e  $\vec{k}$  sejam conhecidos, encontre  $\vec{H}$  como função do tempo, no ponto  $\vec{r} = 0$ .

**Dicas:**

Use a Lei de Faraday para relacionar  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$ .

Lembre-se:  $c$  está relacionada com  $\epsilon_0$  e  $\mu_0$  (permeabilidade magnética do vácuo).

Note a identidade:  $\vec{\nabla} \times (\vec{A}\Psi) = \Psi\vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{\nabla}\Psi \times \vec{A}$ , onde  $\Psi$  é um campo escalar arbitrário, e  $\vec{A}$  é um campo vetorial arbitrário.

**(Relatividade) Questão 8:**

A densidade de massa de um corpo estacionário é  $\rho_0$ . Qual a velocidade de um referencial inercial, relativa a esse corpo, na qual uma medida da densidade do corpo resulta em um fator  $\eta = 25\%$  maior do que  $\rho_0$ ?

**Dados:** Os eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$  dos referenciais estão alinhados, e o referencial inercial se move apenas ao longo do eixo  $x$ .

**Dica:** A massa de repouso é um invariante relativístico.

**(Física Moderna) Questão 9:**

A superfície do Sol tem uma temperatura  $T_{\odot} \approx 6000$  K. O espectro de radiação do Sol é máximo no comprimento de onda de  $\lambda_{m,\odot} = 0.5\mu\text{m}$ . Um filamento de uma lâmpada emite radiação com o máximo do espectro em  $\lambda_{m,\text{fil}} = 2\mu\text{m}$ .

(a) Se tanto a superfície do Sol quanto a do filamento possuem as mesmas características de emissividade, comportando-se como corpos negros, qual é a temperatura do filamento?

(b) Para que a lâmpada irradie duas vezes mais energia por segundo, que valor sua temperatura precisa atingir?

**(Relatividade) Questão 10:**

Num referencial inercial  $K$ , é observada uma partícula de massa de repouso  $m_0$  se aproximar, ao longo do eixo  $x$ , vinda da esquerda, com uma velocidade  $v = \frac{c}{2}$ , e colidir com uma segunda partícula, de massa de repouso  $M_0$ , que se deslocava da direita, com velocidade  $v = \frac{c}{4}$  (ver Fig. 5). Após a colisão, ambas partículas permanecem estacionárias relativamente ao observador em  $K$ .

(a) Expresse a massa de repouso da segunda partícula em termos da primeira.

(b) Qual a diferença, em termos percentuais, entre a previsão Newtoniana e a relativística, para  $M_0$ ?

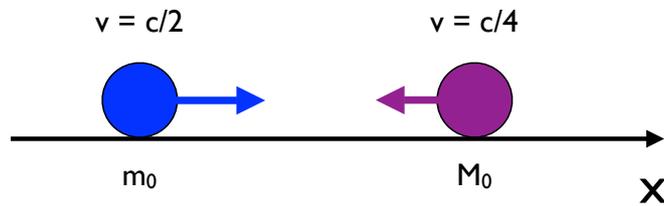


Figura 5: Questão 10.

---

**(Bônus) Questão Extra:**

O número 153 é igual à soma dos cubos de seus algarismos:

$$1^3 + 5^3 + 3^3 = 1 + 125 + 27 = 153. \quad (3)$$

Existem outros números de três algarismos com a mesma propriedade, excluindo números como 001, com zeros à esquerda.

(a) Elabore uma expressão matemática que expresse a propriedade acima (Eq. 3).

(b) Se você fosse escrever um programa que implementasse diretamente a expressão matemática que você respondeu no item (a), quantas possibilidades precisariam ser testadas para chegar na(s) solução(ões)?

**Nota:** não pedimos para que você ache a(s) solução(ões) do problema! Aliás, nós a fornecemos aqui. Os outros números são: 370, 371 e 407, mas essa informação não lhe será muito útil para responder os itens (a) e (b).

---