

INSTITUTO DE ENGENHARIA NUCLEAR

BRUNO DO NASCIMENTO MARTINS

APLICAÇÃO DO MÉTODO DE APROXIMAÇÃO POR FUNÇÕES CONSTANTES  
POR PARTES NA CINÉTICA PONTUAL MODIFICADA

Rio de Janeiro

2019

BRUNO DO NASCIMENTO MARTINS

APLICAÇÃO DO MÉTODO DE APROXIMAÇÃO POR FUNÇÕES CONSTANTES  
POR PARTES NA CINÉTICA PONTUAL MODIFICADA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciência e Tecnologia Nucleares do Instituto de Engenharia Nuclear da Comissão Nacional de Energia Nuclear como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Mestre em Ciências e Tecnologias Nucleares.

Orientador: Zelmo Rodrigues de Lima, D.Sc

Orientador Externo: Alessandro da Cruz Gonçalves, D.Sc

Rio de Janeiro

2019

MART Martins, Bruno

Aplicações do método de aproximação por funções constantes por partes na cinética pontual modificada / Bruno do Nascimento Martins. -- Rio de Janeiro: CNEN/IEN, 2019.

xi, 56 f.: il.; 31cm

Orientadores: Zelmo Rodrigues de Lima e Alessandro da Cruz Gonçalves

Dissertação (mestrado) – Instituto de Engenharia Nuclear, PPGIEN, 2019

1. Física de Reatores. 2. Cinética Pontual. 3. Método PCA.

APLICAÇÕES DO MÉTODO DE APROXIMAÇÃO POR FUNÇÕES CONSTANTES  
POR PARTES NA CINÉTICA PONTUAL MODIFICADA

Bruno do Nascimento Martins

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM  
CIÊNCIA E TECNOLOGIA NUCLEARES DO INSTITUTO DE ENGENHARIA  
NUCLEAR DA COMISSÃO NACIONAL DE ENERGIA NUCLEAR COMO PARTE  
DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE  
EM CIÊNCIAS E TECNOLOGIA NUCLEARES

Aprovada por:

---

Prof. Zelmo Rodrigues de Lima, D.Sc.

---

Prof. Alessandro da Cruz Gonçalves, D.Sc.

---

Prof. Rubens Souza dos Santos, D.Sc.

---

Dr. Paulo Igor de Oliveira Pessoa, D.Sc.

Rio de Janeiro, RJ - BRASIL

JUNHO DE 2019

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela minha vida, saúde e capacidade em trabalhar e aprender um pouco mais a cada dia.

Agradeço aos meus pais, por sempre terem me apoiado e incentivado a prosseguir nos estudos, desde os primeiros passos na alfabetização até o nível de pós-graduação.

Agradeço aos meus orientadores, Professor Dr. Zelmo Rodrigues de Lima e Professor Dr. Alessandro da Cruz Gonçalves pelo suporte e direcionamento na elaboração deste projeto, que agora se conclui de maneira satisfatória.

Agradeço à Eletronuclear pela confiança e oportunidade de realizar este curso mesmo estando trabalhando.

## RESUMO

O presente trabalho utiliza o método numérico conhecido como PCA – “*Piecewise Constant Approximation*” na solução das equações da cinética pontual clássica para seis grupos precursores de nêutrons atrasados. Aplicando-se o método, a função reatividade é aproximada para funções contínuas por partes, e o sistema de equações diferenciais de primeira ordem resultante pode ser resolvido de maneira exata em cada partição do tempo. Para ilustração, são feitas simulações com reatividade tipo degrau, rampa e senoidal, comparando-se os resultados com os apresentados na literatura científica. Posteriormente, generaliza-se o método para o caso da cinética pontual sem a aproximação para a derivada do logaritmo da corrente, a chamada cinética pontual modificada. Para validação, são feitas simulações numéricas e os resultados são comparados com o método de diferenças finitas. A análise quantitativa dos dados obtidos mostra que o método PCA pode ser empregado para obter, com eficiência, bons resultados também na cinética pontual modificada.

Palavras-chave: Física de reatores, cinética de reatores, cinética pontual, cinética pontual modificada, método PCA.

## ABSTRACT

The present work describes a numerical method known as PCA – “Piecewise Constant Approximation” to calculate the solution of the neutron point kinetics equations with six delayed neutron-precursors groups. The time-dependent reactivity function is approximated by piecewise constant functions and the resulting first-order ordinary differential equation system is solved exactly over each time step. Numerical simulations with step, ramp and sinusoidal reactivity functions are made and the solutions are compared with results given in the scientific literature. The method is later extended to the so called modified neutron point kinetics, which has the time derivative of the neutron current not negligible. For validation of the method, solutions are compared with the finite differences method. The quantitative data analysis shows that the method can be used to achieve, efficiently, good results in the modified point reactor kinetics.

**Keywords:** Reactor physics, reactor kinetics, point reactor kinetics, modified point reactor kinetics, PCA method.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1: Gráfico da população de nêutrons da cinética pontual clássica através do método PCA. Reatividade tipo senoidal.....	55
Figura 2: Gráfico das populações de nêutrons da cinética pontual clássica (curva amarela), cinética pontual modificada $\tau=10^{-3}$ s (curva azul) e cinética pontual modificada $\tau = 10^{-4}$ s (curva vermelha). Reatividade tipo rampa. ....	63
Figura 3: Comparação entre cinética pontual clássica (curva amarela), cinética pontual modificada $\tau =10^{-3}$ s (curva azul) e cinética pontual modificada $\tau =10^{-4}$ s (curva vermelha). Reatividade tipo rampa. ....	64

## LISTAS DE TABELAS

Tabela 1: Parâmetros dos Grupos Precursores para U-235 .....	47
Tabela 2: Parâmetros cinéticos para seis grupos de precursores .....	47
Tabela 3: Cálculo da população de nêutrons da cinética pontual clássica através de diferentes métodos. Reatividade tipo degrau igual a 300pcm .....	48
Tabela 4: Desvio relativo percentual entre os métodos utilizados e o resultado exato. Reatividade tipo degrau igual a 300pcm .....	48
Tabela 5: Cálculo da população de nêutrons da cinética pontual clássica através de diferentes métodos. Reatividade tipo degrau igual a 700pcm .....	49
Tabela 6: Desvio relativo percentual entre os métodos utilizados e o resultado exato. Reatividade tipo degrau igual a 700pcm .....	49
Tabela 7: Cálculo da população de nêutrons da cinética pontual clássica através de diferentes métodos. Reatividade tipo degrau igual a 800pcm .....	50
Tabela 8: Desvio relativo percentual entre os métodos utilizados e o resultado exato. Reatividade tipo degrau igual a 800pcm .....	50
Tabela 9: Cálculo da população de nêutrons da cinética pontual clássica através de diferentes métodos. Reatividade tipo rampa e passo $h=0,1s$ .....	52
Tabela 10: Cálculo da população de nêutrons da cinética pontual clássica através de diferentes métodos. Reatividade tipo rampa e passo $h=0,0001s$ .....	52
Tabela 11: Desvio relativo percentual entre o método PCA ( $h=0,0001s$ ) e os métodos de referência. Reatividade tipo rampa .....	53
Tabela 12: Parâmetros dos Grupos Precursores .....	54
Tabela 13: Parâmetros cinéticos para seis grupos de precursores .....	54
Tabela 14: Cálculo da população de nêutrons da cinética pontual clássica através de diferentes métodos. Reatividade tipo senoidal .....	54
Tabela 15: Desvio relativo percentual entre o método PCA e os métodos de referência.....	55
Tabela 16: Parâmetros da cinética modificada para seis grupos de precursores .....	56
Tabela 17: Parâmetros dos Grupos Precursores para U-235 .....	57
Tabela 18: Cálculo da população de nêutrons da cinética pontual modificada através de diferentes métodos. Reatividade tipo degrau igual a 300pcm .....	58
Tabela 19: Desvio relativo percentual entre o método PCA e o método de referência, diferenças finitas. Reatividade tipo degrau igual a 300pcm .....	58

Tabela 20: Cálculo da população de nêutrons da cinética pontual modificada através de diferentes métodos. Reatividade tipo degrau igual a 700pcm .....	58
Tabela 21: Desvio relativo percentual entre o método PCA e o método de referência, diferenças finitas. Reatividade tipo degrau igual a 700pcm.....	59
Tabela 22: Cálculo da população de nêutrons da cinética pontual modificada através de diferentes métodos. Reatividade tipo degrau igual a 800pcm .....	59
Tabela 23: Desvio relativo percentual entre o método PCA e o método de referência, diferenças finitas. Reatividade tipo degrau igual a 800pcm.....	59
Tabela 24: Cálculo da população de nêutrons da cinética pontual modificada através de diferentes métodos. Reatividade tipo rampa e passo $h=0,001s$ .....	61
Tabela 25: Cálculo do desvio relativo percentual do método PCA para o método de referência, de diferenças finitas. Reatividade tipo rampa e passo $h=0,001s$ .....	61
Tabela 26: Cálculo da população de nêutrons da cinética pontual modificada através de diferentes métodos. Reatividade tipo rampa e passo $h=0,0001s$ .....	62
Tabela 27: Cálculo do desvio relativo percentual do método PCA para o método de referência, de diferenças finitas. Reatividade tipo rampa e passo $h=0,0001s$ .....	62

## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

- PCA – Piecewise Constant Approximation
- IAEA – International Atomic Energy Agency
- SCM – Stiffness Confinement Method
- RKM – Runge Kutta Method
- DRP – Desvio Relativo Percentual

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO .....	13
2	CINÉTICA PONTUAL MODIFICADA E CINÉTICA PONTUAL CLÁSSICA .....	19
2.1	DEDUÇÃO DAS EQUAÇÕES DA CINÉTICA PONTUAL MODIFICADA.....	19
2.2	A CINÉTICA PONTUAL CLÁSSICA .....	30
2.3	INTERPRETAÇÃO DOS PARÂMETROS CINÉTICOS.....	31
3	MÉTODO PCA – PIECEWISE CONSTANT APPROXIMATION .....	35
3.1	INTRODUÇÃO.....	35
3.2	MÉTODO PCA NA CINÉTICA PONTUAL CLÁSSICA .....	36
3.3	MÉTODO PCA NA CINÉTICA PONTUAL MODIFICADA.....	41
4	RESULTADOS .....	46
4.1	CINÉTICA PONTUAL CLÁSSICA .....	46
4.1.1	Inserção de reatividade tipo degrau.....	47
4.1.2	Inserção de reatividade tipo rampa.....	51
4.1.3	Inserção de reatividade tipo senoidal .....	53
4.2	CINÉTICA PONTUAL MODIFICADA.....	56
4.2.1	Inserção de reatividade tipo degrau.....	57
4.2.2	Inserção de reatividade tipo rampa.....	60
5	CONCLUSÃO .....	65
6	REFERÊNCIAS .....	67

## 1 INTRODUÇÃO

Segundo a Agência Internacional de Energia Atômica (IAEA, 2017), energia é essencial para o crescimento econômico sustentável e a melhora do bem-estar da humanidade. A energia nuclear propicia acesso à energia limpa, confiável e barata, mitigando os impactos negativos das mudanças climáticas. Ela compõe uma parte significativa da matriz energética mundial, e é esperado crescimento em seu uso nas próximas décadas.

A Agência Internacional de Energia Atômica (IAEA, 2018) afirma ainda que a energia nuclear faz uma contribuição significativa para reduzir a emissão de gases do efeito estufa em todo mundo, ao mesmo tempo em que atende à demanda crescente da população mundial, apoiando o desenvolvimento sustentável global. Usinas nucleares possuem baixíssimas emissões de gases de efeito estufa e demais poluentes durante a operação, e poucas emissões durante seu ciclo de vida total. Como resultado, o uso da energia nuclear evita a emissão de em torno de dois bilhões de toneladas de dióxido de carbono ao ano – o equivalente a tirar 400 milhões de carros das ruas todo ano, quando se comparado com a geração através de usinas térmicas convencionais.

Para Duderstadt e Hamilton (DUDERSTADT, J. J. & HAMILTON, L. J., 1976), o problema central da teoria do reator nuclear é a determinação da distribuição de nêutrons em seu interior, pois isto vai determinar a taxa com que as várias reações nucleares ocorrerão em seu interior. Além disso, através do estudo do comportamento da população de nêutrons, é possível inferir sobre a estabilidade da reação em cadeia. É importante também prever o comportamento temporal da população de nêutrons em função de modificações no fator de multiplicação. Este tópico é conhecido como cinética de reatores.

Para determinar a distribuição de nêutrons no interior do reator, deve-se estudar o processo de transporte, que é o movimento dos nêutrons quando eles se deslocam, frequentemente interagindo com núcleos atômicos através de espalhamento e eventualmente sendo absorvidos ou escapando do reator.

Muitos estudos de física de reatores tratam o movimento dos nêutrons como um processo de difusão, onde se assume que os nêutrons tendem, na média, a migrar de regiões de alta densidade de nêutrons para regiões de baixa densidade. Este tratamento do transporte de nêutrons tem validade limitada, pois os nêutrons tendem a percorrer relativamente longas distâncias entre as interações (DUDERSTADT, J. J. & HAMILTON, L. J., 1976). Segundo Espinosa-Paredes (ESPINOSA-PAREDES, *et al.*, 2011), em um reator de água leve típico, o caminho livre médio dos nêutrons térmicos é da ordem de 1 cm, comparável ao diâmetro da vareta de combustível. Para os nêutrons rápidos, a distância é em torno de alguns centímetros. Por esta razão, o modelo de difusão falha em prever a distribuição de nêutrons no interior do combustível, onde as equações de transporte devem ser empregadas.

No modelo chamado Cinética Pontual, sobre o modelo de difusão com um grupo de energia é feita a hipótese de que a dependência espacial do fluxo de nêutrons pode ser descrita a partir de um único modo – o modo fundamental. Com essa proposição, é possível remover a dependência espacial do modelo de difusão, chegando a uma descrição envolvendo apenas equações diferenciais ordinárias no tempo (DUDERSTADT, J. J. & HAMILTON, L. J., 1976).

Segundo Nunes (NUNES, A. L., 2015), a obtenção das equações da cinética pontual pode ocorrer a partir de uma sequência de aproximações que são feitas a partir de uma teoria mais ampla que envolve o fluxo de nêutrons em um reator nuclear, a teoria do transporte de nêutrons. A obtenção pode ser feita diretamente da equação de transporte de nêutrons, da equação de difusão de nêutrons ou através de um procedimento heurístico.

As equações da Cinética Pontual constituem um dos modelos mais importantes na engenharia nuclear, e tem sido objeto de incontáveis estudos e aplicações para compreensão da dinâmica de nêutrons e seus efeitos (ESPINOSA-PAREDES, *et al.*, 2011). Há artigos científicos na literatura que remontam a década de 1940 até os dias atuais.

Alguns artigos trataram da cinética pontual com efeitos de realimentação de temperatura, pois estes modelos se provaram úteis na descrição de

comportamento transiente do reator. Chen (CHEN *et al.*, 2007) apresentou uma nova análise para um processo pronto-supercrítico de um reator nuclear com feedback de temperatura e potência inicial, com inserção degrau de pequena e grande reatividade. Processos pronto-supercríticos com realimentação de temperatura e pequena inserção de reatividade também foram abordados por Li (LI *et al.*, 2007), no trabalho intitulado “*Approximate solutions of point kinetics equations with one delayed neutron group and temperature feedback during delayed supercritical process*”. Nahla (NAHLA, A. A., 2009), por sua vez, obteve solução analítica para o modelo de cinética pontual com um grupo de precursores e feedback adiabático. Os resultados foram comparados com os obtidos por Chen (CHEN *et al.*, 2007).

Segundo Hayes e Allen (HAYES, J. G. & ALLEN, E. J., 2005), as equações da cinética pontual são determinísticas e podem apenas estimar os valores médios da densidade de nêutrons, das concentrações dos grupos precursores de nêutrons, e do nível de potência. O processo dinâmico, contudo, é estocástico por natureza, pois a densidade de nêutrons e a concentração dos grupos precursores de nêutrons variam randomicamente no tempo. O autor ainda afirma que a altos níveis de potência, o comportamento randômico pode ser desconsiderado, mas a baixos níveis de potência, como durante a partida, flutuações randômicas na densidade de nêutrons e na concentração de grupos precursores de nêutrons podem ser significantes. No trabalho intitulado “*Stochastic point-kinetics equations in nuclear reactor dynamics*”, Hayes e Allen (HAYES, J. G. & ALLEN, E. J., 2005) derivam equações diferenciais estocásticas para a densidade de nêutrons e concentração de grupos precursores de nêutrons atrasados, comparando os resultados com o método de Monte Carlo e dados experimentais.

Outra linha de trabalho encontrada, segundo Espinosa-Paredes (ESPINOSA-PAREDES, *et al.*, 2011), é a cinética pontual com oscilações de reatividade. Peinetti (PEINETTI *et al.*, 2006) estudou a cinética induzida por oscilações de reatividade senoidais em um reator subcrítico, em seu trabalho intitulado “*Kinetics of a point reactor in the presence of reactivity oscillations*”. O autor descobriu que, se um único grupo de precursores é levado em conta, o sistema

se comporta como um oscilador linear sobre-amortecido, com coeficientes variantes e periódicos. Ravetto (RAVETTO, P., 1997) e Dulla (DULLA *et al.*, 2006) mostraram que oscilações de reatividade em um sistema multiplicativo podem desestabilizar a sua resposta, causando transientes de potência exponenciais. Uma aplicação importante é o caso do reator de sal fundido, onde oscilações de reatividade poderiam ser causadas pela formação espontânea de material físsil precipitado. Em um reator de água leve pressurizada, vibração nas barras de controle poderia causar efeito semelhante.

Segundo Espinosa-Paredes (ESPINOSA-PAREDES, *et al.*, 2011), as equações da cinética pontual na sua forma padrão são rígidas, ou seja, existe um tempo de resposta do sistema que é muito curto se comparado à escala de tempo geral do processo, especificamente, a grande diferença de ordens de magnitude entre os tempos de vida dos nêutrons prontos e dos atrasados, resultando na restrição a passos temporais muito pequenos nas soluções numéricas implementadas. O problema de rigidez do sistema tem sido a inspiração de vários métodos de solução, tanto analíticos quanto numéricos. Chao e Attard (CHAO, Y.A. & ATTARD, A., 1985) desenvolveu o chamado método de confinamento da rigidez, Sánchez (SÁNCHEZ, J., 1989), com o método de Runge-Kutta generalizado e Kang e Hansen (KANG, C. M. & HANSEN, K. F., 1973), com método de elementos finitos são alguns exemplos dentre as várias abordagens diferentes encontradas na literatura científica.

Kinrad e Allen (KINRAD, M. & ALLEN, E. J., 2004) elaboraram o método PCA – do inglês, *“Piecewise Constant Approximation”*, que calcula de maneira eficiente a solução das equações da cinética pontual. As funções fonte e reatividade são aproximadas por funções contínuas por partes, transformando o problema em um sistema de equações diferenciais ordinárias lineares, que pode ser resolvido de maneira exata.

Segundo Nunes (NUNES, A. L., 2015), o modelo da cinética pontual vem atendendo às necessidades básicas para controle e operação de um reator nuclear, mas não implica que a investigação acerca do tema esteja encerrada. Novas abordagens podem ser relevantes, como a cinética fracionária de Espinosa-Paredes

(ESPINOSA-PAREDES, *et al.*, 2011), que utiliza equações com termos de derivadas de ordem não inteira, ou a cinética modificada, proposta por Nunes (NUNES, A. L., 2015) na tese de doutorado intitulada “A Influência da Aproximação Referente à Derivada da Corrente de Nêutrons nas Equações da Cinética Pontual”, que desconsidera a aproximação para a derivada do logaritmo da corrente de nêutrons.

O objetivo desta dissertação é obter a solução das equações da cinética pontual clássica com seis grupos precursores de nêutrons atrasados. O método empregado é o PCA, proposto por Kinrad e Allen (KINRAD, M. & ALLEN, E. J., 2004). É mostrado, através de comparação com outros métodos de referência, que o método é eficiente tanto no caso de inserção de reatividade constante, quanto nos casos de reatividade variante no tempo – reatividade tipo rampa e senoidal.

Posteriormente, o método PCA é estendido para a chamada cinética pontual modificada, também com seis grupos precursores de nêutrons atrasados. A metodologia empregada é validada através da comparação com os resultados obtidos através do método de diferenças finitas, apresentados por Nunes (NUNES, A. L., 2015) e Diniz (DINIZ, R. C., 2017). São feitas análises quantitativas para os casos de reatividade constante, tipo degrau, e reatividade variante no tempo, tipo rampa. Os resultados apresentaram alguma discordância para grandes inserções de reatividade.

No segundo capítulo, a dedução da equação da cinética pontual modificada é mostrada a partir da equação do transporte de nêutrons. Posteriormente, mostra-se que a aproximação da derivada do logaritmo das correntes de nêutrons conduz à equação da cinética pontual clássica. São apresentadas as interpretações dos parâmetros cinéticos.

No terceiro capítulo, apresenta-se em detalhes a aplicação do método PCA e seu tratamento matricial para a cinética pontual clássica. Em seguida, mostram-se os ajustes para a generalização do método na cinética pontual modificada.

No quarto capítulo são apresentados os resultados numéricos desta dissertação. A densidade de nêutrons da cinética pontual clássica é calculada numericamente para

as reatividades tipo degrau, rampa e senoidal. Em seguida, mostram-se os resultados da cinética pontual modificada, com reatividades tipo degrau e rampa.

Por fim, no quinto capítulo são feitas as considerações finais e são discutidos os resultados obtidos, tanto na cinética pontual clássica quanto na modificada. São apresentadas também sugestões para trabalhos futuros.

## 2 CINÉTICA PONTUAL MODIFICADA E CINÉTICA PONTUAL CLÁSSICA

### 2.1 DEDUÇÃO DAS EQUAÇÕES DA CINÉTICA PONTUAL MODIFICADA

A descrição da distribuição de nêutrons em um reator nuclear é usualmente feita, de maneira mais abrangente, pelas equações de transporte de nêutrons, assim como é abordado vastamente na literatura científica referente, e.g.: (DUDERSTADT, J. J. & HAMILTON, L. J., 1976) e (HETRICK, D. L., 1993), entre outros.

As equações da Cinética Pontual Modificada podem ser derivadas a partir das equações de transporte de nêutrons, assim como demonstrou Nunes (NUNES, A. L., 2015) e, posteriormente, Diniz (DINIZ, R. C., 2017).

Sendo  $\varphi$  o fluxo angular em função da posição  $\mathbf{r}$ , da energia  $E$ , da direção de movimento  $\hat{\Omega}$  e do tempo  $t$ , sendo  $C_i$  as concentrações de cada grupo de precursores e  $S_{ext}$  a fonte externa de nêutrons (DUDERSTADT, J. J. & HAMILTON, L. J., 1976):

$$\frac{1}{v(E)} \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t)}{\partial t} + L' \varphi = F'_p \varphi + \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^6 [\lambda_i \chi_i(E) C_i(\mathbf{r}, t)] + S_{ext}(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t) \quad (2.1a)$$

$$\frac{1}{4\pi} \chi_i(E) \frac{\partial C_i(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = F'_i \varphi(\mathbf{r}, E', \hat{\Omega}', t) - \frac{1}{4\pi} \lambda_i \chi_i(E) C_i(\mathbf{r}, t) \quad i = 1, \dots, 6. \quad (2.1b)$$

Os operadores  $L'$ ,  $F'_p$  e  $F'_i$  são descritos como:

$$L' \varphi \equiv \hat{\Omega} \cdot \nabla \varphi(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t) + \Sigma_t(\mathbf{r}, E, t) \varphi(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t) + \int_{4\pi} \int_0^\infty \Sigma_s(\mathbf{r}, E' \rightarrow E, \hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega}, t) \varphi(\mathbf{r}, E', \hat{\Omega}', t) dE' d\hat{\Omega}' \quad (2.2a)$$

$$F'_p \varphi \equiv \frac{1}{4\pi} (1 - \beta) \chi_f(E) \int_{4\pi} \int_0^\infty v(E') \Sigma_f(\mathbf{r}, E', t) \varphi(\mathbf{r}, E', \hat{\Omega}', t) dE' d\hat{\Omega}' \quad (2.2b)$$

$$F'_i \varphi(\mathbf{r}, E', \hat{\Omega}', t) \equiv \frac{1}{4\pi} \beta_i \chi_i(E) \int_{4\pi} \int_0^\infty v(E') \Sigma_f(\mathbf{r}, E', t) \varphi(\mathbf{r}, E', \hat{\Omega}', t) dE' d\hat{\Omega}' \quad (2.2c)$$

Onde  $\Sigma_t$ ,  $\Sigma_s$  e  $\Sigma_f$  são as seções de choque macroscópicas total, de espalhamento e de fissão, respectivamente;  $\chi_f$  e  $\chi_i$  são os espectros de energia dos nêutrons gerados por fissão e por decaimento, respectivamente;  $\nu$  é o número médio de nêutrons liberados por fissão;  $\beta$  é a fração total de nêutrons atrasados;  $\beta_i$  é a fração de nêutrons atrasados e  $\lambda_i$  é a constante de decaimento para grupo  $i$  de precursores.

Considera-se a aproximação  $P_1$  para a seção de choque macroscópica de espalhamento, variação de energia apenas em  $\Sigma_{s0}$  e fluxo angular linearmente anisotrópico (DUDERSTADT, J. J. & HAMILTON, L. J., 1976):

$$\Sigma_s(\mathbf{r}, E' \rightarrow E, \hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega}, t) \cong \frac{1}{4\pi} \Sigma_{s0}(\mathbf{r}, E' \rightarrow E, t) + \frac{3}{4\pi} \hat{\Omega}' \cdot \hat{\Omega} \Sigma_{s1}(\mathbf{r}, E' \rightarrow E, t); \quad (2.3a)$$

$$\Sigma_{s1}(\mathbf{r}, E' \rightarrow E, t) \cong \Sigma_{s1}(\mathbf{r}, E', t) \delta(E' - E); \quad (2.3b)$$

$$\varphi(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t) \cong \frac{1}{4\pi} \phi(\mathbf{r}, E, t) + \frac{3}{4\pi} \hat{\Omega} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, E, t). \quad (2.3c)$$

Pelas definições de fluxo de nêutrons e densidade de corrente de nêutrons:

$$\phi(\mathbf{r}, E, t) \equiv \int_{4\pi} \varphi(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t) d\hat{\Omega}, \quad (2.4a)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, E, t) \equiv \int_{4\pi} \varphi(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t) \hat{\Omega} d\hat{\Omega}. \quad (2.4b)$$

Integrando as equações (2.1a) e (2.2b) nos ângulos sólidos, para deixá-las em função do fluxo escalar e da corrente de nêutrons:

$$\frac{1}{\nu(E)} \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, E, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, E, t) + L\phi = F_p \phi + \sum_{i=1}^6 [\lambda_i \chi_i(E) C_i(\mathbf{r}, t)] \quad (2.5a)$$

$$\chi_i(E) \frac{\partial C_i(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = F_i \phi - \lambda_i \chi_i(E) C_i(\mathbf{r}, t) \quad i = 1, \dots, 6 \quad (2.5b)$$

Onde os operadores  $L$ ,  $F_p$  e  $F_i$  são:

$$L\phi \equiv \Sigma_t(\mathbf{r}, E, t)\phi(\mathbf{r}, E, t) - \int_0^\infty \Sigma_{s0}(\mathbf{r}, E' \rightarrow E, t)\phi(\mathbf{r}, E', t) dE' \quad (2.6a)$$

$$F_p\phi \equiv (1 - \beta)\chi_f(E) \int_0^\infty \nu(E')\Sigma_f(\mathbf{r}, E', t)\phi(\mathbf{r}, E', t) dE' \quad (2.6b)$$

$$F_i\phi \equiv \beta_i\chi_i(E) \int_0^\infty \nu(E')\Sigma_f(\mathbf{r}, E', t)\phi(\mathbf{r}, E', t) dE' \quad (2.6c)$$

Multiplicando a equação (2.5a) por  $\hat{\Omega}$  e integrando nos ângulos sólidos, de maneira a eliminar a corrente de nêutrons da equação:

$$\frac{1}{\nu(E)} \frac{\partial J(\mathbf{r}, E, t)}{\partial t} + \frac{1}{3} \nabla \phi(\mathbf{r}, E, t) + \Sigma_t(\mathbf{r}, E, t)J(\mathbf{r}, E, t) = \Sigma_{s1}(\mathbf{r}, E, t)J(\mathbf{r}, E, t) \quad (2.7)$$

$$\frac{1}{\nu(E)} \frac{\partial J(\mathbf{r}, E, t)}{\partial t} + \Sigma_{tr}(\mathbf{r}, E, t)J(\mathbf{r}, E, t) = -\frac{1}{3} \nabla \phi(\mathbf{r}, E, t) \quad (2.8)$$

$$\frac{3D}{\nu(E)} \frac{\partial J(\mathbf{r}, E, t)}{\partial t} + J(\mathbf{r}, E, t) = -D \nabla \phi(\mathbf{r}, E, t) \quad (2.9)$$

Onde  $\Sigma_{tr}$  é a seção de choque macroscópica de transporte e  $D$  é o coeficiente de difusão:

$$\Sigma_{tr}(\mathbf{r}, E, t) \equiv \Sigma_t(\mathbf{r}, E, t) - \Sigma_{s1}(\mathbf{r}, E, t) \quad (2.10a)$$

$$D \equiv D(\mathbf{r}, E, t) \equiv \frac{1}{3\Sigma_{tr}(\mathbf{r}, E, t)} \quad (2.10b)$$

Aplica-se o operador divergência  $\nabla \cdot (\cdot)$  na equação (2.9):

$$\nabla \cdot \left[ \frac{3D(\mathbf{r}, E, t)}{\nu(E)} \frac{\partial J(\mathbf{r}, E, t)}{\partial t} \right] + \nabla \cdot J(\mathbf{r}, E, t) = -\nabla \cdot [D(\mathbf{r}, E, t) \nabla \phi(\mathbf{r}, E, t)] \quad (2.11)$$

Considerando que o coeficiente de difusão varia pouco com a posição para o divergente, obtém-se:

$$\frac{3D(\mathbf{r}, E, t)}{v(E)} \frac{\partial}{\partial t} [\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, E, t)] + \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, E, t) = -\nabla \cdot [D(\mathbf{r}, E, t) \nabla \phi(\mathbf{r}, E, t)] \quad (2.12)$$

Pela equação (2.5a), o termo  $\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, E, t)$  é dado por:

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, E, t) = (F_p - L)\phi(\mathbf{r}, E, t) + \sum_{i=1}^6 [\lambda_i \chi_i(E) C_i(\mathbf{r}, t)] - \frac{1}{v(E)} \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, E, t)}{\partial t} \quad (2.13)$$

Substituindo (2.13) em (2.12):

$$\begin{aligned} & \frac{3D(\mathbf{r}, E, t)}{v(E)} \frac{\partial}{\partial t} [(F_p - L)\phi(\mathbf{r}, E, t)] + \frac{3D(\mathbf{r}, E, t)}{v(E)} \sum_{i=1}^6 \left[ \lambda_i \chi_i(E) \frac{\partial C_i(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right] \\ & - \frac{3D(\mathbf{r}, E, t)}{v^2(E)} \frac{\partial^2 \phi(\mathbf{r}, E, t)}{\partial t^2} + (F_p - L)\phi(\mathbf{r}, E, t) + \sum_{i=1}^6 [\lambda_i \chi_i(E) C_i(\mathbf{r}, t)] - \frac{1}{v(E)} \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, E, t)}{\partial t} \\ & = -\nabla \cdot [D(\mathbf{r}, E, t) \nabla \phi(\mathbf{r}, E, t)] \end{aligned} \quad (2.14)$$

As equações da cinética pontual podem ser obtidas a partir da equação (2.14) e das equações das concentrações dos grupos precursores de nêutrons (2.5b), usando-se o fluxo de nêutrons adjunto  $\phi^*$  e integrando-as na energia e no volume.

No regime estacionário, as equações (2.14) e (2.5b) se reduzem a:

$$-\nabla \cdot [D(\mathbf{r}, E, t_0) \nabla \phi(\mathbf{r}, E, t_0)] + (L_0 - F_0)\phi(\mathbf{r}, E, t_0) = 0 \quad (2.15)$$

Onde os operadores  $L_0$  e  $F_0$  são os operadores  $L$ ,  $F_i$  e  $F_p$  no caso estacionário:

$$L_0(\cdot) \equiv \Sigma_t(\mathbf{r}, E, t_0)(\cdot) - \int_0^\infty \Sigma_{s0}(\mathbf{r}, E' \rightarrow E, t_0)(\cdot) dE' \quad (2.16a)$$

$$F_0(\cdot) \equiv \left[ (1 - \beta) \chi_f(E) + \sum_{i=1}^6 \beta_i \chi_i(E) \right] \int_0^\infty v(E') \Sigma_f(\mathbf{r}, E', t_0)(\cdot) dE' \quad (2.16b)$$

O fluxo adjunto de nêutrons,  $\phi^* = \phi^*(\mathbf{r}, E, t_0)$  atende a equação (2.17):

$$-\nabla \cdot [D(\mathbf{r}, E, t_0) \nabla \phi^*(\mathbf{r}, E, t_0)] + (L_0^+ - F_0^+) \phi^*(\mathbf{r}, E, t_0) = 0 \quad (2.17)$$

Onde os operadores  $L_0^+$  e  $F_0^+$  são:

$$L_0^+(\cdot) \equiv \Sigma(\mathbf{r}, E, t_0)(\cdot) - \int_0^\infty \Sigma_{s0}(\mathbf{r}, E' \rightarrow E, t_0)(\cdot) dE' \quad (2.18a)$$

$$F_0^+(\cdot) \equiv \nu(E) \Sigma(\mathbf{r}, E, t_0) \int_0^\infty \left[ (1 - \beta) \chi_f(E') + \sum_{i=1}^6 \beta_i \chi_i(E') \right] (\cdot) dE' \quad (2.18b)$$

Multiplica-se a equação (2.17) por  $\phi$  e integrando no volume e na energia:

$$\int_{V'} \int_0^\infty \phi \nabla \cdot [D(\mathbf{r}, E, t_0) \nabla \phi^*] d^3 r dE - \int_{V'} \int_0^\infty \phi (L_0^+ - F_0^+) \phi^* d^3 r dE = 0 \quad (2.19)$$

Multiplicam-se as equações (2.14) e (2.5b) por  $\phi^*$  e integrando no volume e na energia, de maneira a remover a dependência nessas variáveis:

$$\begin{aligned} & \int_{V'} \int_0^\infty \frac{3D(\mathbf{r}, E, t)}{v(E)} \phi^* \frac{\partial}{\partial t} [(F_p - L) \phi] d^3 r dE - \int_{V'} \int_0^\infty \frac{3D(\mathbf{r}, E, t)}{v^2(E)} \phi^* \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} d^3 r dE \\ & + \int_{V'} \int_0^\infty \frac{3D(\mathbf{r}, E, t)}{v(E)} \sum_{i=1}^6 \left[ \lambda_i \phi^* \chi_i(E) \frac{\partial C_i(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right] d^3 r dE + \int_{V'} \int_0^\infty \phi^* (F_p - L) \phi d^3 r dE \\ & + \int_{V'} \int_0^\infty \sum_{i=1}^6 [\lambda_i \phi^* \chi_i(E) C_i(\mathbf{r}, t)] d^3 r dE - \int_{V'} \int_0^\infty \frac{1}{v(E)} \phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} d^3 r dE \\ & + \int_{V'} \int_0^\infty \phi^* \nabla \cdot [D(\mathbf{r}, E, t) \nabla \phi] d^3 r dE = 0 \end{aligned} \quad (2.20a)$$

$$\int_{V'} \int_0^\infty \chi_i(E) \phi^* \frac{\partial C_i(\mathbf{r}, t)}{\partial t} d^3 r dE = \int_{V'} \int_0^\infty \phi^* F_i \phi d^3 r dE - \int_{V'} \int_0^\infty \lambda_i \phi^* \chi_i(E) C_i(\mathbf{r}, t) d^3 r dE \quad (2.20b)$$

$i = 1, 2, \dots, 6$

Subtrai-se a equação (2.20a) de (2.19):

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathcal{V}} \int_0^\infty \frac{3D(\mathbf{r}, E, t)}{v^2(E)} \phi^* \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} d^3 r dE + \int_{\mathcal{V}} \int_0^\infty \frac{3D(\mathbf{r}, E, t)}{v(E)} \phi^* \frac{\partial}{\partial t} [(L - F_p)\phi] d^3 r dE \\
& + \int_{\mathcal{V}} \int_0^\infty \frac{1}{v(E)} \phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} d^3 r dE - \int_{\mathcal{V}} \int_0^\infty \frac{3D(\mathbf{r}, E, t)}{v(E)} \sum_{i=1}^6 \left[ \lambda_i \phi^* \chi_i(E) \frac{\partial C_i(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right] d^3 r dE \\
& - \int_{\mathcal{V}} \int_0^\infty \sum_{i=1}^6 [\lambda_i \phi^* \chi_i(E) C_i(\mathbf{r}, t)] d^3 r dE + \int_{\mathcal{V}} \int_0^\infty (\phi F_0^+ \phi^* - \phi^* F_p \phi) d^3 r dE \\
& + \int_{\mathcal{V}} \int_0^\infty \{ \phi^* [L(\cdot) - \nabla \cdot [D(\mathbf{r}, E, t) \nabla(\cdot)]] \phi - \phi [L_0^+(\cdot) - \nabla \cdot [D(\mathbf{r}, E, t_0) \nabla(\cdot)]] \phi^* \} d^3 r dE = 0
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Sendo (2.22a) e (2.22b) os dois últimos termos de (2.21):

$$\int_{\mathcal{V}} \int_0^\infty (\phi F_0^+ \phi^* - \phi^* F_p \phi) d^3 r dE \tag{2.22a}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathcal{V}} \int_0^\infty \{ \phi^* [L(\cdot) - \nabla \cdot [D(\mathbf{r}, E, t) \nabla(\cdot)]] \phi - \phi [L_0^+(\cdot) \\
& - \nabla \cdot [D(\mathbf{r}, E, t_0) \nabla(\cdot)]] \phi^* \} d^3 r dE
\end{aligned} \tag{2.22b}$$

Sendo (2.23):

$$\int_{\mathcal{V}} \int_0^\infty \phi^* \sum_{i=1}^6 (F_i \phi) d^3 r dE \tag{2.23}$$

Soma-se e subtrai-se (2.23) em (2.22a):

$$\int_{\mathcal{V}} \int_0^\infty \left[ \phi F_0^+ \phi^* - \phi^* F_p \phi - \phi^* \sum_{i=1}^6 (F_i \phi) + \phi^* \sum_{i=1}^6 (F_i \phi) \right] d^3 r dE \tag{2.24}$$

Utiliza-se em (2.24) as expressões de  $F_p$ ,  $F_i$  e  $F_0$ , (2.6b), (2.6c) e (2.16b), respectivamente:

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathcal{V}} \int_0^\infty \int_0^\infty [\phi(\mathbf{r}, E, t) v(E) \Sigma_f(\mathbf{r}, E, t_0) \chi(E') \phi^*(\mathbf{r}, E', t_0)] d^3 r dE dE' \\
& - \int_{\mathcal{V}} \int_0^\infty \int_0^\infty [\phi^*(\mathbf{r}, E, t_0) \chi(E) v(E') \Sigma_f(\mathbf{r}, E', t) \phi(\mathbf{r}, E', t)] d^3 r dE dE' \\
& + \int_{\mathcal{V}} \int_0^\infty \sum_{i=1}^6 (\phi^* F_i \phi) d^3 r dE
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Onde:

$$\chi(E) = (1 - \beta)\chi_f(E) + \sum_{i=1}^6 \beta_i \chi_i(E) \quad (2.26)$$

Substituindo no primeiro termo de (2.25), as variáveis de integração  $E$  por  $E'$  e  $E'$  por  $E$ :

$$\begin{aligned} & \int_{V'} \int_0^\infty \int_0^\infty [\phi(\mathbf{r}, E', t) \mathbf{v}(E') \Sigma_f(\mathbf{r}, E', t_0) \chi(E) \phi^*(\mathbf{r}, E, t_0)] d^3 r dE dE' \\ & - \int_{V'} \int_0^\infty \int_0^\infty [\phi^*(\mathbf{r}, E, t_0) \chi(E) \mathbf{v}(E') \Sigma_f(\mathbf{r}, E', t) \phi(\mathbf{r}, E', t)] d^3 r dE dE' \\ & + \int_{V'} \int_0^\infty \sum_{i=1}^6 (\phi^* F_i \phi) d^3 r dE \end{aligned} \quad (2.27)$$

Escreve-se (2.27) em termos dos operadores  $F_p$ ,  $F_i$  e  $F_0$ :

$$\int_{V'} \int_0^\infty \left[ \phi^*(F_0 - F) \phi + \sum_{i=1}^6 (\phi^* F_i \phi) \right] d^3 r dE \quad (2.28)$$

Onde:

$$F(\cdot) = F_p(\cdot) + \sum_{i=1}^6 F_i(\cdot) \quad (2.29)$$

Desenvolve-se (2.22b) com as expressões de  $L$  (2.6a) e  $L_0^+$  (2.18a):

$$\begin{aligned} & \int_{V'} \int_0^\infty \left\{ \phi^* \Sigma_t(\mathbf{r}, E, t) \phi - \phi \Sigma_t(\mathbf{r}, E, t_0) \phi^* - \phi^* \left[ \int_0^\infty \Sigma_{s0}(\mathbf{r}, E' \rightarrow E, t) (\cdot) dE' \right] \phi + \right. \\ & \left. + \phi \left[ \int_0^\infty \Sigma_{s0}(\mathbf{r}, E \rightarrow E', t_0) (\cdot) dE' \right] \phi^* - \phi^* \mathbf{V} \cdot [D(\mathbf{r}, E, t) \mathbf{V} \phi] + \phi \mathbf{V} \cdot [D(\mathbf{r}, E, t_0) \mathbf{V} \phi^*] \right\} d^3 r dE \end{aligned} \quad (2.30)$$

Pode-se separar a expressão (2.30) em três partes. Analisando-as separadamente:

$$\int_{V'} \int_0^\infty \phi^* [\Sigma_t(\mathbf{r}, E, t) - \Sigma_t(\mathbf{r}, E, t_0)] \phi d^3 r dE \quad (2.31a)$$

$$\begin{aligned} & \int_{V'} \int_0^\infty \int_0^\infty [\phi(\mathbf{r}, E, t) \Sigma_{s0}(\mathbf{r}, E \rightarrow E', t_0) \phi^*(\mathbf{r}, E', t_0) d^3r dE dE'] \\ & - \int_{V'} \int_0^\infty \int_0^\infty [\phi^*(\mathbf{r}, E, t_0) \Sigma_{s0}(\mathbf{r}, E' \rightarrow E, t) \phi(\mathbf{r}, E', t) d^3r dE dE'] \end{aligned} \quad (2.31b)$$

$$\int_{V'} \int_0^\infty \{ \phi \nabla \cdot [D(\mathbf{r}, E, t_0) \nabla \phi^*] - \phi^* \nabla \cdot [D(\mathbf{r}, E, t) \nabla \phi] \} d^3r dE \quad (2.31c)$$

Permutam-se as variáveis de integração  $E$  e  $E'$  na expressão (2.31b):

$$\int_{V'} \int_0^\infty \phi^* \left\{ \int_0^\infty [\Sigma_{s0}(\mathbf{r}, E' \rightarrow E, t_0) - \Sigma_{s0}(\mathbf{r}, E' \rightarrow E, t)] (\cdot) dE' \right\} \phi d^3r dE \quad (2.32)$$

Sendo (2.33) o termo a seguir:

$$\int_{V'} \int_0^\infty \{ \phi^* \nabla \cdot [D(\mathbf{r}, E, t_0) \nabla \phi] \} d^3r dE \quad (2.33)$$

Soma-se e subtrai-se (2.33) de (2.31c):

$$\begin{aligned} & \int_{V'} \int_0^\infty \{ \phi \nabla \cdot [D(\mathbf{r}, E, t_0) \nabla \phi^*] - \phi^* \nabla \cdot [D(\mathbf{r}, E, t_0) \nabla \phi] \} d^3r dE \\ & + \int_{V'} \int_0^\infty \{ \phi^* \nabla \cdot [D(\mathbf{r}, E, t_0) \nabla \phi] - \phi^* \nabla \cdot [D(\mathbf{r}, E, t) \nabla \phi] \} d^3r dE \end{aligned} \quad (2.34)$$

Analisa-se a primeira integral de (2.34):

$$\begin{aligned} & \int_{V'} \int_0^\infty \{ \phi \nabla \cdot [D(\mathbf{r}, E, t_0) \nabla \phi^*] - \phi^* \nabla \cdot [D(\mathbf{r}, E, t_0) \nabla \phi] \} d^3r dE \\ & = \int_{V'} \int_0^\infty \{ \nabla \cdot [\phi D(\mathbf{r}, E, t_0) \nabla \phi^*] - D(\mathbf{r}, E, t_0) \nabla \phi \cdot \nabla \phi^* - \nabla \cdot [\phi^* D(\mathbf{r}, E, t_0) \nabla \phi] \\ & \quad + [D(\mathbf{r}, E, t_0) \nabla \phi^* \cdot \nabla \phi] \} d^3r dE \\ & = \int_{V'} \int_0^\infty \{ \nabla \cdot [\phi D(\mathbf{r}, E, t_0) \nabla \phi^*] - \nabla \cdot [\phi^* D(\mathbf{r}, E, t_0) \nabla \phi] \} d^3r dE \\ & = \int_{V'} \int_0^\infty \nabla \cdot [D(\mathbf{r}, E, t_0) (\phi \nabla \phi^* - \phi^* \nabla \phi)] d^3r dE \end{aligned} \quad (2.35)$$

Utiliza-se o Teorema da Divergência de Gauss em (2.35):

$$\begin{aligned} & \int_{V'} \int_0^\infty \nabla \cdot \{D(\mathbf{r}, E, t_0) [\phi(\mathbf{r}, E, t) \nabla \phi^*(\mathbf{r}, E, t_0) - \phi^*(\mathbf{r}, E, t_0) \nabla \phi(\mathbf{r}, E, t)]\} d^3 r dE \\ &= \int_{S_V} \int_0^\infty D(\mathbf{r}_s, E, t_0) [\phi(\mathbf{r}_s, E, t) \nabla \phi^*(\mathbf{r}_s, E, t_0) - \phi^*(\mathbf{r}_s, E, t_0) \nabla \phi(\mathbf{r}_s, E, t)] dS dE \end{aligned} \quad (2.36)$$

Onde  $\mathbf{r}_s$  representa a superfície do volume em questão. Considerando-se as condições de contorno do tipo vácuo:

$$\phi(\mathbf{r}_s, E, t) = \phi^*(\mathbf{r}_s, E, t_0) = 0$$

A integral de superfície em (2.36) se anula. A expressão (2.34) se reduz a:

$$\begin{aligned} & \int_{V'} \int_0^\infty \{\phi^* \nabla \cdot [D(\mathbf{r}, E, t_0) \nabla \phi] - \phi^* \nabla \cdot [D(\mathbf{r}, E, t) \nabla \phi]\} d^3 r dE \\ & \int_{V'} \int_0^\infty \phi^* \{\nabla \cdot [D(\mathbf{r}, E, t_0) \nabla (\cdot)] - \nabla \cdot [D(\mathbf{r}, E, t) \nabla (\cdot)]\} \phi d^3 r dE \end{aligned} \quad (2.37)$$

Define-se o operador  $A$  a partir do operador  $L$ , definido em (2.6a), e seus respectivos casos estacionários:

$$\begin{aligned} L(\cdot) &\equiv \Sigma_t(\mathbf{r}, E, t)(\cdot) - \int_0^\infty \Sigma_{s0}(\mathbf{r}, E' \rightarrow E, t)(\cdot) dE' \\ A(\cdot) &\equiv L(\cdot) - \nabla \cdot [D(\mathbf{r}, E, t) \nabla (\cdot)] \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned} L_0(\cdot) &\equiv \Sigma_t(\mathbf{r}, E, t_0)(\cdot) - \int_0^\infty \Sigma_{s0}(\mathbf{r}, E' \rightarrow E, t_0)(\cdot) dE' \\ A_0(\cdot) &\equiv L_0(\cdot) - \nabla \cdot [D(\mathbf{r}, E, t_0) \nabla (\cdot)] \end{aligned} \quad (2.39)$$

Escreve-se (2.22b) em termos dos operadores definidos em (2.38) e (2.39):

$$\int_{V'} \int_0^\infty \{\phi^* [L(\cdot) - \nabla \cdot [D(\mathbf{r}, E, t) \nabla (\cdot)]] \phi - \phi [L_0^+(\cdot) - \nabla \cdot [D(\mathbf{r}, E, t_0) \nabla (\cdot)]] \phi^*\} d^3 r dE$$

$$= \int_{V'} \int_0^{\infty} [\phi^*(A - A_0) \phi] d^3r dE \quad (2.40)$$

Substituem-se as expressões (2.28) e (2.40) na equação (2.21), obtendo-se:

$$\begin{aligned} & \int_{V'} \int_0^{\infty} \frac{3D(\mathbf{r}, E, t)}{v^2(E)} \phi^* \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} d^3r dE + \int_{V'} \int_0^{\infty} \frac{3D(\mathbf{r}, E, t)}{v(E)} \phi^* \frac{\partial}{\partial t} [(L - F_p)\phi] d^3r dE \\ & + \int_{V'} \int_0^{\infty} \frac{1}{v(E)} \phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} d^3r dE = \int_{V'} \int_0^{\infty} \phi^* [(F - F_0) - (A - A_0)] \phi d^3r dE \\ & - \int_{V'} \int_0^{\infty} \sum_{i=1}^6 (\phi^* F_i \phi) d^3r dE + \int_{V'} \int_0^{\infty} \frac{3D(\mathbf{r}, E, t)}{v(E)} \sum_{i=1}^6 \left\{ \lambda_i \frac{\partial}{\partial t} [\chi_i(E) \phi^* C_i(\mathbf{r}, t)] \right\} d^3r dE \\ & + \int_{V'} \int_0^{\infty} \sum_{i=1}^6 [\lambda_i \chi_i(E) \phi^* C_i(\mathbf{r}, t)] d^3r dE \end{aligned} \quad (2.41)$$

Onde:

$$A(\cdot) = L(\cdot) - \nabla \cdot [D(\mathbf{r}, E, t) \nabla(\cdot)] \quad (2.42a)$$

$$A_0(\cdot) = L_0(\cdot) - \nabla \cdot [D(\mathbf{r}, E, t_0) \nabla(\cdot)] \quad (2.42b)$$

$$F(\cdot) = F_p(\cdot) - \sum_{i=1}^6 F_i(\cdot) \quad (2.42c)$$

Assume-se que a forma espacial do fluxo de nêutrons não varie com o tempo, mantendo o mesmo perfil espacial do regime estacionário, pode-se separar a parte dependente do tempo da parte dependente da posição e energia (DUDERSTADT, J. J. & HAMILTON, L. J., 1976):

$$\phi(\mathbf{r}, E, t) \cong n(t) f(\mathbf{r}, E)$$

Desprezam-se as variações temporais das seções de choque e do coeficiente de difusão em (2.41), obtendo-se:

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2 n(t)}{dt^2} \int_V \int_0^\infty \frac{3D}{v^2} \phi^* f d^3 r dE + \frac{dn(t)}{dt} \int_V \int_0^\infty \left[ \frac{3D}{v} \phi^* (L - F_p) f + \frac{\phi^* f}{v} \right] d^3 r dE \\
&= n(t) \int_V \int_0^\infty \phi^* [(F - F_0) - (A - A_0)] f d^3 r dE - n(t) \int_V \int_0^\infty \sum_{i=1}^6 (\phi^* F_i f) d^3 r dE \\
&\quad + \int_V \int_0^\infty \frac{3D}{v} \sum_{i=1}^6 \left\{ \lambda_i \frac{\partial}{\partial t} [\chi_i(E) \phi^* C_i(\mathbf{r}, t)] \right\} d^3 r dE \\
&\quad + \int_V \int_0^\infty \sum_{i=1}^6 [\lambda_i \chi_i(E) \phi^* C_i(\mathbf{r}, t)] d^3 r dE
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Multiplica-se a equação (2.5b) pelo fluxo adjunto e integra-se no volume e energia:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_V \int_0^\infty \phi^* \chi_i(E) C_i(\mathbf{r}, t) d^3 r dE &= n(t) \int_V \int_0^\infty \phi^* F_i \phi d^3 r dE \\
-\lambda_i \int_V \int_0^\infty \phi^* \chi_i(E) C_i(\mathbf{r}, t) d^3 r dE &\quad i = 1, \dots, 6
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Define-se o fator de normalização  $I_f$  e os seguintes parâmetros cinéticos:

$$I_f \equiv \int_V \int_0^\infty \phi^* F f d^3 r dE \tag{2.45a}$$

$$\Lambda \equiv \frac{1}{I_f} \int_V \int_0^\infty \frac{\phi^* f}{v} d^3 r dE \tag{2.45b}$$

$$\tau \equiv \frac{1}{\Lambda I_f} \int_V \int_0^\infty \frac{3D}{v^2} \phi^* f d^3 r dE \tag{2.45c}$$

$$\rho(t) \equiv \frac{1}{I_f} \int_V \int_0^\infty \phi^* [(F - F_0) - (A - A_0)] f d^3 r dE \tag{2.45d}$$

$$\beta_i \equiv \frac{1}{I_f} \int_V \int_0^\infty \phi^* F_i f d^3 r dE \tag{2.45e}$$

$$\beta \equiv \sum_{i=1}^6 \beta_i \tag{2.45f}$$

$$\frac{1}{l} \equiv \frac{1 - \beta}{\Lambda} + \frac{1}{\tau \Lambda I_f} \int_V \int_0^\infty \frac{3D}{v^2} \phi^* (L - F_p) f d^3 r dE \tag{2.45g}$$

$$C_i(t) \equiv \frac{1}{\Lambda I_f} \int_{V'} \int_0^\infty \phi^* \chi_i C_i(\mathbf{r}, t) d^3r dE \quad (2.45h)$$

Com as definições das equações (2.45a) a (2.45h), divide-se (2.43) e (2.44) por  $\Lambda I_f$  e chega-se as equações da cinética pontual modificada proposta por Nunes (NUNES, A. L., 2015).

$$\tau \frac{d^2 n(t)}{dt^2} + \left[ 1 + \tau \left( \frac{1}{l} - \frac{1 - \beta}{\Lambda} \right) \right] \frac{dn(t)}{dt} = \frac{\rho(t) - \beta}{\Lambda} n(t) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \left( C_i(t) + \tau \frac{dC_i(t)}{dt} \right) \quad (2.46a)$$

$$\frac{dC_i(t)}{dt} = \frac{\beta_i}{\Lambda} n(t) - \lambda_i C_i(t) \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.46b)$$

Onde  $n(t)$  é a população de nêutrons;  $\tau$  é o chamado tempo de relaxação;  $\Lambda$  é o tempo de geração dos nêutrons;  $l$  é chamado tempo médio de vida dos nêutrons prontos;  $\rho(t)$  é a função de reatividade dependente do tempo;  $\beta$  é a fração total de nêutrons atrasados;  $\beta_i$  é a fração de nêutrons atrasados,  $C_i(t)$  é a concentração dos grupos precursores de nêutrons,  $\lambda_i$  é a constante de decaimento do grupo  $i$  de precursores.

## 2.2 A CINÉTICA PONTUAL CLÁSSICA

As equações da cinética pontual clássica podem ser deduzidas de maneira análoga às da cinética modificada obtidas na seção anterior, assim como mostram Nunes (NUNES, A. L., 2015) e Diniz (DINIZ, R. C., 2017), desde que seja atendida a seguinte simplificação adicional:

$$\frac{1}{|J(\mathbf{r}, E, t)|} \frac{\partial |J(\mathbf{r}, E, t)|}{\partial t} \ll v \Sigma_{tr} \quad (2.47)$$

Onde

$$\frac{\partial \ln |J(\mathbf{r}, E, t)|}{\partial t} = \frac{1}{|J(\mathbf{r}, E, t)|} \frac{\partial |J(\mathbf{r}, E, t)|}{\partial t} \quad (2.48)$$

A relação mostrada na equação (2.47) nos diz que a taxa de variação da corrente de nêutrons é muito menor que a frequência de colisões. Como os valores típicos de frequência de colisões são da ordem de  $10^5 \text{ s}^{-1}$  ou maiores, somente uma variação extremamente rápida da corrente de nêutrons iria invalidar essa consideração. Variações tão rápidas muito raramente são encontradas na dinâmica de reatores (DUDERSTADT, J. J. & HAMILTON, L. J., 1976).

Ao se atender a condição (2.47), pode-se desprezar o termo da derivada temporal da corrente em (2.9), resultando na seguinte expressão, comumente conhecida na física como Lei de Fick (DUDERSTADT, J. J. & HAMILTON, L. J., 1976):

$$J(\mathbf{r}, E, t) = -D\nabla \cdot \phi(\mathbf{r}, E, t) \quad (2.49)$$

Observa-se que a equação (2.49) é obtida quando o termo  $3D/\nu$  da equação (2.9) tende a zero. Para se obter as equações da cinética clássica a partir da cinética modificada, basta zerar o termo  $3D/\nu$  da equação (2.43) e dos parâmetros cinéticos (2.45a) a (2.45h) (DINIZ, R. C., 2017):

$$\frac{dn(t)}{dt} = \frac{\rho(t) - \beta}{\Lambda} n(t) + \sum_{i=1}^m \lambda_i C_i(t) \quad (2.50a)$$

$$\frac{dC_i(t)}{dt} = \frac{\beta_i}{\Lambda} n(t) - \lambda_i C_i(t) \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.50b)$$

### 2.3 INTERPRETAÇÃO DOS PARÂMETROS CINÉTICOS

Considerando-se um reator homogêneo e monoenergético, o fator de normalização, os parâmetros cinéticos e os operadores apresentados anteriormente são simplificados conforme foi demonstrado por Diniz (DINIZ, R. C., 2017). Tais operadores são:

$$L(\cdot) = \Sigma_t(t)(\cdot) - \Sigma_{s0}(t)(\cdot) = \Sigma_a(t)(\cdot) \quad (2.51a)$$

$$F_p(\cdot) = (1 - \beta)v\Sigma_f(t)(\cdot) \quad (2.51b)$$

$$F_i(\cdot) = \beta_i v\Sigma_f(t)(\cdot) \quad (2.51c)$$

$$F(\cdot) = F_p(\cdot) + \sum_{i=1}^6 F_i(\cdot) = v\Sigma_f(t)(\cdot) \quad (2.51d)$$

$$A(\cdot) = L(\cdot) - D(t)\nabla^2(\cdot) \quad (2.51e)$$

Sendo os operadores  $L_0$ ,  $F_0$  e  $A_0$  os respectivos operadores avaliados em  $t = t_0$ . Os parâmetros cinéticos e fator de normalização ficam:

$$I_f = v\Sigma_f(t) \int_{V'} \int_0^\infty \phi^* f d^3r dE \quad (2.52a)$$

$$\Lambda = \frac{1}{v\Sigma_f} \quad (2.52b)$$

$$\tau = \frac{3D}{v} = \frac{1}{v\Sigma_{tr}} = \frac{1}{f_d} \quad (2.52c)$$

$$\rho(t) = 1 - \frac{1}{k_{eff}} \quad (2.52d)$$

$$l = \frac{1}{v\Sigma_a} \quad (2.52e)$$

$$k_{eff} = \frac{v\Sigma_f}{\Sigma_a - DB_g^2} \quad (2.52f)$$

O fator de normalização (2.52a) é útil para que a definição de reatividade seja reduzida de (2.45d) para (2.52d) no caso do reator homogêneo e monoenergético, levando-se em consideração que o sistema estava crítico para  $t < t_0$ .

O parâmetro  $\Lambda$  (2.52b) denomina-se tempo médio de geração de nêutrons, que caracteriza o tempo médio entre a geração de um nêutron e sua subsequente absorção causando fissão (DUDERSTADT, J. J. & HAMILTON, L. J., 1976).

O parâmetro  $\tau$  (2.52c) é chamado tempo de relaxação (ESPINOSA-PAREDES *et. al*, 2011).  $\tau^{-1} = f_d$  é definido como frequência de transporte, e está relacionado com a taxa de reações de transporte do nêutron. Quando  $\tau$  tende a zero ( $\tau \rightarrow 0$ ), a equação da cinética pontual modificada (2.46a) é transformada na equação da cinética pontual clássica (2.50a).

O parâmetro  $l$  (2.52e) é chamado tempo médio de vida dos nêutrons prontos, e está relacionado com o tempo médio entre absorções do nêutron. O inverso de  $l$  está associado à taxa de reações de absorção.

A equação (2.52f) define o fator de multiplicação efetivo, que relaciona geometria do reator e material que torna o sistema crítico, a partir da seguinte equação de criticalidade:

$$-D\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) + \Sigma_a \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{k_{eff}} \nu \Sigma_f \phi(\mathbf{r}) \quad (2.52f)$$

O parâmetro (2.52d) é chamado reatividade e está relacionado com o desvio do fator de multiplicação da criticalidade  $k_{eff} = 1$  (DUDERSTADT, J. J. & HAMILTON, L. J., 1976).

O parâmetro  $\beta_i$  refere-se à fração efetiva de nêutrons atrasados. Visto que os nêutrons atrasados são liberados com energias menores que os nêutrons prontos, eles necessitam de menos moderação para atingir a faixa térmica. Segundo Stacey (STACEY, W. M., 2007), a energia média dos nêutrons emitidos por decaimento radioativo é aproximadamente 0,5 MeV, enquanto que os nêutrons prontos possuem 1,0 MeV, aproximadamente. A expressão (3.45e) modifica a magnitude das frações dos nêutrons atrasados para levar esse fato em consideração.

Quando são considerados diferentes isótopos sofrendo fissão, a fração efetiva pode ser interpretada como uma média da fração de nêutrons atrasados dos isótopos envolvidos. De fato, é observado que na maioria dos reatores térmicos, as médias das frações de nêutrons atrasados diminuem com o tempo de operação, devido à influência de isótopos como Pu-239 e U-233, que possuem significativamente menos nêutrons atrasados que o U-235 (DUDERSTADT, J. J. & HAMILTON, L. J., 1976). Neste projeto, considera-se apenas o isótopo U-235 sofrendo fissão.

### 3 MÉTODO PCA – PIECEWISE CONSTANT APPROXIMATION

#### 3.1 INTRODUÇÃO

As equações da cinética pontual se constituem de um sistema acoplado de equações diferenciais ordinárias e lineares, onde os parâmetros dependentes do tempo são as funções fonte e reatividade. O método numérico utilizado neste trabalho – Método PCA – *“Piecewise Constant Approximation”* consiste em aproximar os parâmetros fonte e reatividade por funções constantes por partes em um intervalo de tempo  $h_i$ . O sistema resultante de equações diferenciais é então resolvido de maneira analítica em cada intervalo de tempo. O método foi proposto por Kinrad e Allen (KINRAD, M. & ALLEN, E. J., 2004), no trabalho intitulado *“Efficient numerical solution of the point kinetics equations in nuclear reactor dynamics”*.

Uma propriedade importante e conhecida das equações da cinética pontual é a rigidez do sistema. A rigidez ocorre em função da diferença entre as magnitudes dos tempos de vida dos nêutrons prontos e dos nêutrons atrasados (CHAO, Y.A. & ATTARD, A., 1985). Esta característica exige que soluções numéricas sejam implementadas com passos temporais pequenos. Caso as funções reatividade e fonte sejam pouco variantes no tempo, a aproximação por funções constantes por partes é precisa, contornando o problema de rigidez do sistema (KINRAD, M., ALLEN, E. J., 2004).

Uma característica atrativa do método abordado neste trabalho é a sua simplicidade, fazendo-o ser fácil de se implementar e programar com relação aos métodos comumente encontrados na literatura científica. Adicionalmente, o método é eficiente, preciso e apresenta erro proporcional a  $h^2$ , com relação ao passo no tempo (KINRAD, M., ALLEN, E. J., 2004).

### 3.2 MÉTODO PCA NA CINÉTICA PONTUAL CLÁSSICA

Considerando as equações da cinética pontual clássica para  $m$  grupos de precursores (DUDERSTADT, J. J. & HAMILTON, L. J., 1976).

$$\frac{dn(t)}{dt} = \frac{\rho(t) - \beta}{\Lambda} n(t) + \sum_{i=1}^m \lambda_i C_i(t) + F(t) \quad (3.1a)$$

$$\frac{dC_i(t)}{dt} = \frac{\beta_i}{\Lambda} n(t) - \lambda_i C_i(t) \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3.1b)$$

Onde  $n(t)$  é a população de nêutrons;  $\Lambda$  é o tempo de geração dos nêutrons;  $\rho(t)$  é a função de reatividade dependente do tempo;  $F(t)$  é a função de fonte de nêutrons dependente do tempo;  $\beta$  é a fração total de nêutrons atrasados;  $\beta_i$  é a fração de nêutrons atrasados,  $C_i(t)$  é a concentração dos grupos precursores de nêutrons,  $\lambda_i$  é a constante de decaimento do grupo  $i$  de precursores.

É usual escrever as equações da cinética pontual (3.1a) e (3.2b) na forma matricial:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = A\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{F}(t) \quad (3.2)$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

Onde o vetor  $\mathbf{x}(t)$  é definido como:

$$\mathbf{x}(t) = [n(t) \quad C_1(t) \quad C_2(t) \quad \dots \quad C_m(t)]^T$$

$A$  é a matriz definida como:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-\beta}{\Lambda} & \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_m \\ \frac{\beta_1}{\Lambda} & -\lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\beta_2}{\Lambda} & 0 & -\lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\beta_m}{\Lambda} & 0 & 0 & \cdots & -\lambda_m \end{bmatrix}$$

$B(t)$  é a matriz definida como:

$$B(t) = \begin{bmatrix} \rho(t)/\Lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

O vetor de fonte  $F(t)$  é definido como:

$$F(t) = [F(t) \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]^T$$

E o vetor condição inicial:

$$x(0) = \left[ 1 \quad \frac{\beta_1}{\lambda_1 \Lambda} \quad \frac{\beta_2}{\lambda_2 \Lambda} \quad \cdots \quad \frac{\beta_m}{\lambda_m \Lambda} \right]^T$$

O método consiste em aproximar as funções reatividade e fonte por funções constantes por partes em cada partição do tempo:

$$\rho(t) \approx \rho \left( \frac{t_i + t_{i+1}}{2} \right) = \rho_i, \quad t_i \leq t \leq t_{i+1} \quad (3.3)$$

$$F(t) \approx F \left( \frac{t_i + t_{i+1}}{2} \right) = F_i, \quad t_i \leq t \leq t_{i+1}$$

Fazendo-se a aproximação (3.3), transforma-se o sistema de equações diferenciais (3.2) no seguinte sistema:

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{\boldsymbol{x}}}{dt} &= A\hat{\boldsymbol{x}} + B_i\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{F}_i \\ \hat{\boldsymbol{x}}(t_i) &= \hat{\boldsymbol{x}}_i\end{aligned}\quad (3.4)$$

Onde  $\boldsymbol{x}(t) \approx \hat{\boldsymbol{x}}(t)$ .

É possível integrar o sistema de equações diferenciais de primeira ordem, com coeficientes constantes (3.4), utilizando-se o fator integrante  $e^{-(A+B_i)t}$  e valendo-se das propriedades da matriz exponencial (BOYCE, E.W., & DIPRIMA, R.C., 2002).

$$\begin{aligned}e^{-(A+B_i)t} \frac{d\hat{\boldsymbol{x}}}{dt} &= e^{-(A+B_i)t} (A + B_i)\hat{\boldsymbol{x}} + e^{-(A+B_i)t} \boldsymbol{F}_i \\ \frac{d}{dt} (e^{-(A+B_i)t} \hat{\boldsymbol{x}}) &= e^{-(A+B_i)t} \boldsymbol{F}_i\end{aligned}\quad (3.5)$$

Integram-se os dois lados da equação (3.5) de  $t_i$  a  $t_{i+1}$ , no passo de tempo  $i$ :

$$e^{-(A+B_i)t_{i+1}} \hat{\boldsymbol{x}}_{i+1} - e^{-(A+B_i)t_i} \hat{\boldsymbol{x}}_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{-(A+B_i)t} \boldsymbol{F}_i dt \quad (3.6)$$

Desenvolvendo-se a equação (3.6) e fazendo  $h_i = t_{i+1} - t_i$ , chega-se a:

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{i+1} = e^{(A+B_i)h_i} \hat{\boldsymbol{x}}_i + (e^{(A+B_i)h_i} - I)(A + B_i)^{-1} \boldsymbol{F}_i \quad (3.7)$$

É possível diagonalizar a matriz  $A + B_i$ , de maneira que se possa tornar o cálculo da equação (3.7) mais eficiente:

$$A + B_i = X_i D_i X_i^{-1} \quad (3.8)$$

Onde  $X_i$  é a matriz construída com os autovetores da matriz  $A + B_i$ ,  $X_i^{-1}$  é sua respectiva matriz inversa e  $D_i$  é a matriz diagonal, cujos elementos da diagonal principal são os autovalores associados à matriz  $A + B_i$ .

Substituindo a decomposição (3.8) em (3.7), chega-se a:

$$\hat{\mathbf{x}}_{i+1} = X_i e^{D_i h_i} X_i^{-1} \hat{\mathbf{x}}_i + (X_i e^{D_i h_i} X_i^{-1} - I) X_i D_i^{-1} X_i^{-1} \mathbf{F}_i \quad (3.9)$$

De maneira equivalente:

$$\hat{\mathbf{x}}_{i+1} = X_i e^{D_i h_i} X_i^{-1} [\hat{\mathbf{x}}_i + X_i D_i^{-1} X_i^{-1} \mathbf{F}_i] - X_i D_i^{-1} X_i^{-1} \mathbf{F}_i \quad (3.10)$$

Uma vez determinadas as matrizes  $X_i$ ,  $X_i^{-1}$  e  $D_i$ , cada passo no tempo é calculado com uma série de multiplicações e adições de matrizes e vetores, o que é uma tarefa computacional rápida.

A determinação dos autovalores da matriz da Cinética Pontual  $A + B_i$  pode ser feita através do cálculo das raízes da Equação Inhour:

$$\rho_i = \beta + \lambda \omega - \sum_{j=1}^m \frac{\beta_j \lambda_j}{\omega + \lambda_j} \quad (3.11)$$

A Equação Inhour (3.11) pode, de maneira equivalente, ser expressa como um polinômio  $P_i(\omega)$  de grau  $m + 1$ :

$$P_i(\omega) = (\rho_i - \lambda \omega) \prod_{l=1}^m (\lambda_l + \omega) - \omega \sum_{k=1}^m \beta_k \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^m (\lambda_l + \omega) = 0 \quad (3.12)$$

É conhecido que as raízes das equações (3.11) e (3.12) são todas reais (HETRICK, D. L., 1993). É possível encontrá-las utilizando o Método de Newton ou algum outro algoritmo de cálculo de raízes de polinômios.

Para o cálculo dos autovetores da matriz da Cinética Pontual,  $A + B_i$ , e construção da matriz  $X_i$ , pode-se utilizar as seguintes expressões (HETRICK, D. L., 1993):

$$X_i = U_i = [\mathbf{u}_1^{(i)} \quad \mathbf{u}_2^{(i)} \quad \dots \quad \mathbf{u}_{m+1}^{(i)}] \quad (3.13)$$

Onde  $\mathbf{u}_k^{(i)}$  é o vetor coluna  $(m + 1) \times 1$ :

$$\mathbf{u}_k^{(i)} = \left[ 1 \quad \frac{\beta_1/\Lambda}{\lambda_1 + \omega_k^{(i)}} \quad \frac{\beta_2/\Lambda}{\lambda_2 + \omega_k^{(i)}} \quad \dots \quad \frac{\beta_m/\Lambda}{\lambda_m + \omega_k^{(i)}} \right]^T \quad (3.14)$$

A matriz inversa  $X_i^{-1}$  é determinada através da seguinte expressão:

$$X_i^{-1} = V_i^T = [\mathbf{v}_1^{(i)} \quad \mathbf{v}_2^{(i)} \quad \dots \quad \mathbf{v}_{m+1}^{(i)}]^T \quad (3.15)$$

Onde  $\mathbf{v}_k^{(i)}$  é o vetor coluna  $(m + 1) \times 1$ :

$$\mathbf{v}_k^{(i)} = \mathbf{v}_k^{(i)} \left[ 1 \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \omega_k^{(i)}} \quad \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \omega_k^{(i)}} \quad \dots \quad \frac{\lambda_m}{\lambda_m + \omega_k^{(i)}} \right]^T \quad (3.16)$$

$$\mathbf{v}_k^{(i)} = \left[ 1 + \sum_{j=1}^m \frac{\beta_j \lambda_j}{\Lambda (\lambda_j + \omega_k^{(i)})^2} \right]^{-1} \quad (3.17)$$

Para o caso de fonte e reatividade constantes no tempo, o cálculo das matrizes  $X_i$ ,  $X_i^{-1}$  e  $D_i$  só precisa ser feito uma vez, pois tanto os autovalores quanto os autovetores da matriz da Cinética Pontual  $A + B_i$  tornam-se invariantes no tempo. Se a função fonte ou reatividade forem variantes no tempo, as matrizes  $X_i$ ,  $X_i^{-1}$  e  $D_i$  precisam ser calculadas em cada passo no tempo.

### 3.3 MÉTODO PCA NA CINÉTICA PONTUAL MODIFICADA

Sendo (3.18a) e (3.18b) as equações da cinética pontual modificada:

$$\tau \frac{d^2 n(t)}{dt^2} + \left[ 1 + \tau \left( \frac{1}{l} - \frac{1 - \beta}{\Lambda} \right) \right] \frac{dn(t)}{dt} = \frac{\rho(t) - \beta}{\Lambda} n(t) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \left( C_i(t) + \tau \frac{dC_i(t)}{dt} \right) \quad (3.18a)$$

$$\frac{dC_i(t)}{dt} = \frac{\beta_i}{\Lambda} n(t) - \lambda_i C_i(t) \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3.18b)$$

Definindo o termo:

$$\Lambda_a = \left[ 1 + \tau \left( \frac{1}{l} - \frac{1 - \beta}{\Lambda} \right) \right] \Lambda \quad (3.19)$$

Fazendo (3.19) em (3.18a):

$$\tau \frac{d^2 n(t)}{dt^2} + \frac{\Lambda_a}{\Lambda} \frac{dn(t)}{dt} = \frac{\rho(t) - \beta}{\Lambda} n(t) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \left( C_i(t) + \tau \frac{dC_i(t)}{dt} \right) \quad (3.20)$$

Fazendo a seguinte mudança de variáveis:

$$\frac{dn(t)}{dt} = y(t) \quad (3.21)$$

Substituindo (3.21) em (3.20):

$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + \frac{\Lambda_a}{\Lambda} y(t) = \frac{\rho(t) - \beta}{\Lambda} n(t) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \left( C_i(t) + \tau \frac{dC_i(t)}{dt} \right) \quad (3.22)$$

Substituindo (3.18b) em (3.22) para eliminar o termo com a derivada das concentrações dos grupos precursores:

$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + \frac{\Lambda_a}{\Lambda} y(t) = \frac{\rho(t) - \beta}{\Lambda} n(t) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \left( C_i(t) + \frac{\tau \beta_i}{\Lambda} n(t) - \tau \lambda_i C_i(t) \right) \quad (3.23)$$

Reagrupando os termos de (3.23), obtém-se o sistema de equações da Cinética Pontual Modificada reescrita de maneira semelhante à Cinética Pontual Clássica.

$$\frac{dy(t)}{dt} = \left[ \frac{\rho(t) - \beta + \tau \sum_{i=1}^m \lambda_i \beta_i}{\tau \Lambda} \right] n(t) - \frac{\Lambda_a}{\tau \Lambda} y(t) + \sum_{i=1}^m \left( \frac{\lambda_i - \tau \lambda_i^2}{\tau} \right) c_i(t) \quad (3.24a)$$

$$\frac{dc_i(t)}{dt} = \frac{\beta_i}{\Lambda} n(t) - \lambda_i c_i(t) \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3.24b)$$

Coloca-se o sistema de equações (3.24a) e (3.24b) na forma matricial:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = M(t)\mathbf{x}(t) \quad (3.25)$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

Onde o vetor  $\mathbf{x}(t)$  é definido como:

$$\mathbf{x}(t) = [n(t) \quad y(t) \quad c_1(t) \quad c_2(t) \quad \dots \quad c_m(t)]^T$$

$M(t)$  é a matriz definida como:

$$M(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\rho(t) - \beta}{\tau \Lambda} + \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i \beta_i}{\Lambda} & -\frac{\Lambda_a}{\tau \Lambda} & \frac{\lambda_1}{\tau} - \lambda_1^2 & \frac{\lambda_2}{\tau} - \lambda_2^2 & \dots & \frac{\lambda_m}{\tau} - \lambda_m^2 \\ \frac{\beta_1}{\Lambda} & 0 & -\lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\beta_2}{\Lambda} & 0 & 0 & -\lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\beta_m}{\Lambda} & 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda_m \end{bmatrix}$$

E o vetor condição inicial:

$$\mathbf{x}(0) = \left[ 1 \quad \frac{\rho_0}{\Lambda_a} \quad \frac{\beta_1}{\lambda_1 \Lambda} \quad \dots \quad \frac{\beta_m}{\lambda_m \Lambda} \right]^T$$

Procede-se com a Equação da Cinética Pontual Modificada de maneira semelhante à Cinética Pontual Clássica.

Aproxima-se a função reatividade por funções constantes por partes:

$$\rho(t) \approx \rho\left(\frac{t_i + t_{i+1}}{2}\right) = \rho_i, \quad t_i \leq t \leq t_{i+1} \quad (3.26)$$

Transforma-se o sistema de equações diferenciais (3.25) no seguinte sistema aproximado (3.27):

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = M_i \hat{x} \quad (3.27)$$

$$\hat{x}(t_i) = \hat{x}_i$$

Onde  $x(t) \approx \hat{x}(t)$ .

Multiplicam-se os dois lados da equação pelo fator integrante  $e^{-(M_i)t}$ , de maneira semelhante ao que foi feito no caso da cinética pontual clássica:

$$e^{-(M_i)t} \frac{d\hat{x}}{dt} = e^{-(M_i)t} (M_i) \hat{x}$$

$$\frac{d}{dt} (e^{-(M_i)t} \hat{x}) = 0 \quad (3.28)$$

Integram-se os dois lados da equação (3.28) de  $t_i$  a  $t_{i+1}$ , no passo de tempo  $i$ :

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} d(e^{-(M_i)t} \hat{x}) = 0 \quad (3.29)$$

$$e^{-(M_i)t_{i+1}} \hat{x}_{i+1} - e^{-(M_i)t_i} \hat{x}_i = 0 \quad (3.30)$$

Desenvolvendo-se a equação (3.30) e fazendo  $h_i = t_{i+1} - t_i$ , chega-se a:

$$\hat{x}_{i+1} = e^{M_i h_i} \hat{x}_i \quad (3.31)$$

É possível diagonalizar a matriz  $M_i$ , de maneira que se possa tornar o cálculo da equação (3.31) mais eficiente:

$$M_i = X_i D_i X_i^{-1}, \quad (3.32)$$

Onde  $X_i$  é a matriz construída com os autovetores da matriz  $M_i$ ,  $X_i^{-1}$  é sua respectiva matriz inversa e  $D_i$  é a matriz diagonal, cujos elementos da diagonal principal são os autovalores associados à matriz  $M_i$ .

Os autovalores e autovetores da matriz  $M_i$  da Cinética Pontual Modificada podem ser calculados através do cálculo numérico das raízes de seu respectivo polinômio característico. Para o caso de 6 grupos de precursores:

$$\det \begin{bmatrix} m_{11} - \lambda & m_{12} & m_{13} & \cdots & m_{18} \\ m_{21} & m_{22} - \lambda & m_{23} & \cdots & m_{28} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} - \lambda & \cdots & m_{38} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{81} & m_{82} & m_{83} & \cdots & m_{88} - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

No caso de matrizes simétricas e/ou esparsas, outros métodos mais rápidos podem ser utilizados para o cálculo dos autovalores, e.g.: Método de Jacobi ou Método da Sequência de Sturm.

Nas simulações realizadas neste projeto, foram utilizadas as funções “*Eigenvalues*” e “*Eigenvectors*”, intrínsecas do software Wolfram Mathematica® para o cálculo de autovalores e autovetores.

Substituindo a decomposição (3.32) em (3.31), chega-se a:

$$\hat{\mathbf{x}}_{i+1} = X_i e^{D_i h_i} X_i^{-1} \hat{\mathbf{x}}_i \quad (3.33)$$

Uma vez determinadas as matrizes  $X_i$ ,  $X_i^{-1}$  e  $D_i$ , cada passo no tempo é calculado com uma série de multiplicações e adições de matrizes e vetores.

## 4 RESULTADOS

Os resultados são obtidos, neste trabalho, para os modelos da cinética pontual clássica e cinética pontual modificada. Adotam-se os modelos com seis grupos precursores de nêutrons, de maneira que se possam aproximar as simulações da realidade de um reator típico de água leve pressurizada. Segundo Stacey (STACEY, W. M., 2007), apesar de existir um número relativamente grande de produtos de fissão que podem posteriormente decair via emissão de nêutrons, o efeito observado do conjunto pode ser bem representado definindo seis grupos efetivos de precursores de nêutrons.

Para o modelo de cinética pontual clássica, são considerados três tipos de inserção de reatividade: Inserção de reatividade tipo degrau (300, 700 e 800pcm), inserção tipo rampa e inserção senoidal. Os resultados são comparados com obtidos por outros métodos de referência.

No caso da cinética pontual modificada, são considerados dois tipos de inserção de reatividade: Inserção de reatividade tipo degrau (300, 700 e 800pcm) e inserção tipo rampa. Os resultados são comparados com o modelo de referência, que foi obtido com método das diferenças finitas.

Todos os códigos foram implementados com software Wolfram Mathematica<sup>®</sup> 6.0.

### 4.1 CINÉTICA PONTUAL CLÁSSICA

Para a solução das equações da cinética pontual clássica, foram utilizados os seguintes dados típicos largamente empregados na literatura para seis grupos precursores de nêutrons e isótopo físsil U-235, e.g.: Chao & Attard (CHAO, Y.A. & ATTARD, A., 1985) e Kinrad & Allen (KINRAD, M. & ALLEN, E. J., 2004), entre outros.

Tabela 1: Parâmetros dos Grupos Precusores para U-235

Grupo de precusores	$\lambda_i (s^{-1})$	$\beta_i$
1	0,0127	0,000266
2	0,0317	0,001491
3	0,115	0,001316
4	0,311	0,002849
5	1,40	0,000896
6	3,87	0,000182

Tabela 2: Parâmetros cinéticos para seis grupos de precusores

Parâmetro	Valor
$\Lambda$	0,00002 s
$\beta = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_6$	0,007

#### 4.1.1 Inserção de reatividade tipo degrau

Foram consideradas nas simulações três inserções tipo degrau de reatividade: inserção pronto-subcrítica de 300pcm, inserção pronto-crítica de 700pcm e inserção pronto-supercrítica de 800pcm. Os resultados obtidos são apresentados nas tabelas 3, 5 e 7.

Visto que o transiente de inserção de reatividade tipo degrau possui soluções através de diferentes métodos na literatura científica, o método PCA é comparado com os seguintes: método das diferenças finitas, apresentado por Nunes (NUNES, A. L., 2015), método de Runge-Kutta generalizado, desenvolvido por Sánchez (SÁNCHEZ, J., 1989) e método SCM – *Stiffness Confinement Method* – método de confinamento da rigidez, de Chao e Attard (CHAO, Y.A. & ATTARD, A., 1985). A solução de referência será a utilizada por Chao e Attard (CHAO, Y.A. & ATTARD, A., 1985), e, posteriormente, por Kinrad e Allen (KINRAD, M. & ALLEN, E. J., 2004). Esta solução é tratada por ambos autores como exata.

Para comparação quantitativa entre os métodos, calcula-se o desvio relativo percentual com relação à solução exata:

$$DRP = \left| \frac{n(t) - n(t)_{exato}}{n(t)_{exato}} \right| \cdot 100\% \quad (4.1)$$

Os desvios relativos percentuais calculados são apresentados nas tabelas 4, 6 e 8.

Tabela 3: Cálculo da população de nêutrons da cinética pontual clássica através de diferentes métodos. Reatividade tipo degrau igual a 300pcm

Método	t = 1,0s	t = 10s	t = 20s
PCA (h=0,1s)	2,20984	8,01920	2,82974.10 <sup>1</sup>
Diferenças finitas (h=10 <sup>-6</sup> s)	2,20984	8,01914	2,82970.10 <sup>1</sup>
Runge-Kutta (h variável)	2,20985	8,01891	2,82948.10 <sup>1</sup>
SCM (h variável)	2,22540	8,03240	2,83510.10 <sup>1</sup>
Exato	2,20980	8,01920	2,82970.10 <sup>1</sup>

Tabela 4: Desvio relativo percentual entre os métodos utilizados e o resultado exato. Reatividade tipo degrau igual a 300pcm

Método	t = 1,0s	t = 10s	t = 20s
PCA (h=0,1s)	0,00181	0	0,00141
Diferenças finitas (h=10 <sup>-6</sup> s)	0,00181	0,00075	0
Runge-Kutta (h variável)	0,00226	0,00362	0,00777
SCM (h variável)	0,70595	0,164605	0,19083

Observa-se que, para a inserção de reatividade tipo degrau de 300pcm (inserção pronto-subcrítica), os resultados obtidos pelo método PCA foram muito próximos da solução exata. O desvio máximo encontrado ficou próximo de 0,002%, mesmo utilizando-se o passo temporal de 0,1s, que é muito maior, por exemplo, do que o passo utilizado pelo método das diferenças finitas, de 10<sup>-6</sup>. Os métodos Runge-Kutta

generalizado e SCM apresentaram desvios máximos maiores: 0,008% e 0,7%, respectivamente.

Tabela 5: Cálculo da população de nêutrons da cinética pontual clássica através de diferentes métodos. Reatividade tipo degrau igual a 700pcm

Método	t = 0,01s	t = 0,50s	t = 2,0s
PCA (h=0,01)	4,50886	5,34589.10 <sup>3</sup>	2,05916.10 <sup>11</sup>
Diferenças finitas (h=10 <sup>-5</sup> s)	4,50883	5,34407.10 <sup>3</sup>	2,05637.10 <sup>11</sup>
Runge-Kutta (h variável)	4,50885	5,34450.10 <sup>3</sup>	2,05697.10 <sup>11</sup>
SCM (h variável)	4,50010	5,35300.10 <sup>3</sup>	2,06270.10 <sup>11</sup>
Exato	4,50880	5,34590.10 <sup>3</sup>	2,05910.10 <sup>11</sup>

Tabela 6: Desvio relativo percentual entre os métodos utilizados e o resultado exato. Reatividade tipo degrau igual a 700pcm

Método	t = 0,01s	t = 0,50s	t = 2,0s
PCA (h=0,01)	0.00133	0.00019	0.00291
Diferenças finitas (h=10 <sup>-5</sup> s)	0.00066	0.03423	0.13258
Runge-Kutta (h variável)	0.00111	0.02619	0.10344
SCM (h variável)	0.19296	0.13281	0.17483

Comparam-se os resultados obtidos para o caso de uma inserção de reatividade tipo degrau de 700pcm, com a intensidade igual à fração dos nêutrons atrasados (inserção pronto-crítica). Esta é uma situação mais crítica, pois a população de nêutrons cresce muito rápido. O método PCA também se mostrou eficiente neste caso, pois manteve a mesma magnitude de desvio (0,003%). Os métodos de diferenças finitas, Runge-Kutta generalizado e SCM apresentaram desempenho bastante inferior, com desvios máximos de aproximadamente 0,13; 0,10 e 0,19%, respectivamente.

Tabela 7: Cálculo da população de nêutrons da cinética pontual clássica através de diferentes métodos. Reatividade tipo degrau igual a 800pcm

Método	t = 0,01s	t = 0,10s	t = 1,0s
PCA (h=0,01)	6,20285	1,41042.10 <sup>3</sup>	6,16333.10 <sup>23</sup>
Diferenças finitas (h=10 <sup>-5</sup> s)	6,20115	1,40845.10 <sup>3</sup>	6,07804.10 <sup>23</sup>
Runge-Kutta (h variável)	6,20276	1,41010.10 <sup>3</sup>	6,14860.10 <sup>23</sup>
SCM (h variável)	6,20460	1,40890.10 <sup>3</sup>	6,15740.10 <sup>23</sup>
PCA (h=0,01)	6,20290	1,41040.10 <sup>3</sup>	6,16340.10 <sup>23</sup>

Tabela 8: Desvio relativo percentual entre os métodos utilizados e o resultado exato. Reatividade tipo degrau igual a 800pcm

Método	t = 0,01s	t = 0,10s	t = 1,0s
PCA (h=0,01)	0.00081	0.00142	0.00114
Diferenças finitas (h=10 <sup>-5</sup> s)	0.02821	0.13826	1.38495
Runge-Kutta (h variável)	0.00226	0.02127	0.24013
SCM (h variável)	0.02741	0.10635	0.09734

A inserção de reatividade tipo degrau de 800pcm é classificada como uma inserção pronto-supercrítica e é um caso extremo. A população de nêutrons cresce de maneira muito rápida, num período da ordem do tempo de vida dos nêutrons prontos, de 10<sup>-4</sup>s (DUDERSTADT, J. J. & HAMILTON, L. J., 1976). O método PCA é novamente o método que apresenta menor desvio máximo, da ordem de 0,0014%. Os métodos SCM e Runge-Kutta generalizado são, em sequência, os outros que tiveram melhor desempenho. O método das diferenças finitas apresentou, neste caso, desvio o máximo consideravelmente grande de 1,38%.

#### 4.1.2 Inserção de reatividade tipo rampa

O método PCA também pode ser empregado para resolver as equações da cinética pontual com reatividade variante no tempo, como no caso da rampa. Este tipo de reatividade pode ser encontrado em uma situação real de retirada inadvertida de barra de controle de dentro do reator.

Considerando uma reatividade tipo rampa, com velocidade “moderadamente rápida” de \$0,1/s\$, assim como foi proposto por Chao & Attard (CHAO, Y.A. & ATTARD, A., 1985):

$$\rho(t) = \$0,1 \cdot t = 0,0007 \cdot t$$

Os parâmetros cinéticos e os dos seis grupos precursores são idênticos aos utilizados nas simulações com reatividade degrau.

As simulações são feitas com passos temporais de 0,1 e 0,0001s, de maneira que se teste a sensibilidade da resposta a essa variação, e são apresentadas nas tabelas 9 e 10, respectivamente. Os resultados são comparados com os obtidos pelo método de confinamento da rigidez – SCM e o método de ponderação  $\theta$  de Henry – “Henry’s  $\theta$ -weighting method”, ambos apresentados por Chao e Attard (CHAO, Y.A. & ATTARD, A., 1985).

É feito um cálculo do desvio relativo percentual dos resultados do método PCA com os métodos de referência – tabela 11:

$$DRP = \left| \frac{n(t)_{PCA} - n(t)_{ref}}{n(t)_{ref}} \right| \cdot 100\% \quad (4.2)$$

Tabela 9: Cálculo da população de nêutrons da cinética pontual clássica através de diferentes métodos. Reatividade tipo rampa e passo  $h=0,1s$

Tempo	PCA $h = 0,1s$	Theta - weighting $h = 0,1s$	SCM $h = 0,1s$
t = 2s	1,3565	1,3383	1,3382
t = 4s	2,2869	2,2290	2,2284
t = 6s	5,8890	5,5885	5,5819
t = 8s	$4,9836 \cdot 10^1$	$4,3215 \cdot 10^1$	$4,2788 \cdot 10^1$
t = 9s	$6,9542 \cdot 10^2$	$5,0636 \cdot 10^2$	$4,8781 \cdot 10^2$
t = 10s	$1,6534 \cdot 10^6$	$7,8558 \cdot 10^5$	$4,5391 \cdot 10^5$
t = 11s	$9,9649 \cdot 10^{17}$	$1,5527 \cdot 10^{15}$	$1,9593 \cdot 10^{16}$

Observa-se nos resultados da tabela 9 que houve um desvio considerável entre os três métodos comparados. No instante final  $t = 11s$ , os valores das populações de nêutrons divergiram em mais de dez vezes. O ocorrido pode ser explicado pelo fato da inserção de reatividade ser grande, demandando um passo temporal menor.

A seguir, diminui-se o passo do método PCA para  $h = 0,0001s$  e compara-se com os resultados do método de ponderação de  $\theta$  ( $0,0001s$ ) e método SCM variável (CHAO, Y.A. & ATTARD, A., 1985), obtendo-se os resultados da tabela 10.

Tabela 10: Cálculo da população de nêutrons da cinética pontual clássica através de diferentes métodos. Reatividade tipo rampa e passo  $h=0,0001s$

Tempo	PCA $h = 0,0001$	Theta - weighting $h = 0,0001s$	SCM $h$ variável
t = 2s	1,3382	1,3382	1,3372
t = 4s	2,2285	2,2283	2,2267
t = 6s	5,5824	5,5815	5,5774
t = 8s	$4,2793 \cdot 10^1$	$4,2781 \cdot 10^1$	$4,2746 \cdot 10^1$
t = 9s	$4,8770 \cdot 10^2$	$4,8745 \cdot 10^2$	$4,8698 \cdot 10^2$

t = 10s	4,5172.10 <sup>5</sup>	4,5109.10 <sup>5</sup>	4,5060.10 <sup>5</sup>
t = 11s	1,7992.10 <sup>16</sup>	1,7919.10 <sup>16</sup>	1,7898.10 <sup>16</sup>

Tabela 11: Desvio relativo percentual entre o método PCA (h=0,0001s) e os métodos de referência. Reatividade tipo rampa

Tempo	Theta - weighting 0,0001s	SCM variável
t = 2s	0	0,07478
t = 4s	0,00897	0,08084
t = 6s	0,01612	0,08965
t = 8s	0,02805	0,10995
t = 9s	0,05129	0,14785
t = 10s	0,13966	0,24856
t = 11s	0,40739	0,52520

Os resultados encontrados com passo de 0,0001s mostram que a divergência entre os métodos caem consideravelmente. A maior diferença percentual, encontrada no final da escala de tempo, fica em 0,40% para o método da ponderação de  $\theta$  e 0,52% para o método SCM variável.

#### 4.1.3 Inserção de reatividade tipo senoidal

O método PCA também pode ser utilizado para resolver com precisão problemas que contenham oscilações cíclicas de reatividade (KINRAD, M. & ALLEN, E. J., 2004).

Considerando os seguintes parâmetros cinéticos e parâmetros dos grupos precursores de nêutrons utilizados por Hansen (HANSEN, K. F. *et al.*, 1965) e Petersen (PETERSEN, C. Z. *et al.*, 2011), e supondo a reatividade dependente do tempo senoidal:

$$\rho(t) = 0,00073 \cdot \text{sen}(t)$$

Tabela 12: Parâmetros dos Grupos Precusores

Grupo de precusores	$\lambda_i (s^{-1})$	$\beta_i$
1	0,0124	0,000214
2	0,0305	0,001423
3	0,111	0,001247
4	0,301	0,002568
5	1,14	0,000748
6	3,01	0,000273

Tabela 13: Parâmetros cinéticos para seis grupos de precusores

Parâmetro	Valor
$\Lambda$	0,00003
$\beta = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_6$	0,006473

São obtidos os resultados através do método PCA, e, em seguida, comparados na tabela 14 com os resultados obtidos através do método da decomposição e do método de Hansen (PETERSEN, C. Z. *et al.*, 2011).

Tabela 14: Cálculo da população de nêutrons da cinética pontual clássica através de diferentes métodos. Reatividade tipo senoidal

Tempo	PCA h=0,001	Método da Decomposição	Hansen
t = 1s	1,12399	1,12351	1,12396
t = 2s	1,16887	1,16816	1,16880
t = 3s	1,07442	1,07429	1,07442
t = 4s	0,95378	0,95527	0,95380
t = 5s	0,90735	0,90454	0,90737
t = 10s	0,98462	0,98172	0,98464

Calcula-se na sequência o desvio relativo percentual dos resultados obtidos pelo método PCA para os dois métodos de referência.

Tabela 15: Desvio relativo percentual entre o método PCA e os métodos de referência

Tempo	Método da Decomposição	Hansen
t = 1s	0,04272	0,00267
t = 2s	0,06078	0,00599
t = 3s	0,01210	0
t = 4s	0,15598	0,00210
t = 5s	0,31065	0,00220
t = 10s	0,29540	0,00203

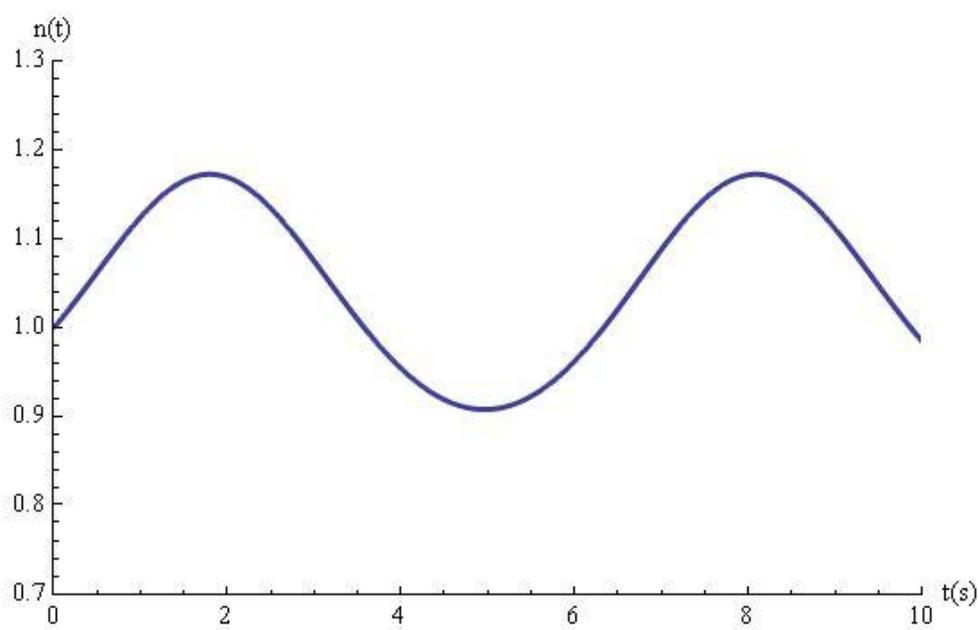


Figura 1: Gráfico da população de nêutrons da cinética pontual clássica através do método PCA. Reatividade tipo senoidal.

Verifica-se concordância entre os dados obtidos pelo método PCA e os métodos de referência, para o caso de reatividade senoidal. O máximo desvio relativo percentual

ficou abaixo de 0,311%, para o método de decomposição e 0,006%, para o método de Hansen.

#### 4.2 CINÉTICA PONTUAL MODIFICADA

O método PCA também pode ser empregado para se obter soluções numéricas para as equações da cinética pontual modificada.

Para esta tarefa, foram utilizados os parâmetros cinéticos de Nunes (NUNES, A. L., 2015), na tabela 16, e os demais parâmetros dos seis grupos de precursores de nêutrons largamente empregados na literatura para isótopo físsil U-235, e.g.: Chao e Attard (CHAO, Y.A. & ATTARD, A., 1985) e Kinrad e Allen (KINRAD, M. & ALLEN, E. J., 2004), entre outros – tabela 17.

As simulações são feitas, como critério de comparação, com frequências de transporte de nêutrons  $1/\tau$  distintas iguais a  $10^3$  e  $10^4 \text{ s}^{-1}$ . Segundo Nunes (NUNES, A. L., 2015), levando-se em conta os resultados experimentais disponíveis na literatura da área, a faixa de valores para frequência de transporte de nêutrons vai de  $10^6$  até  $10^3 \text{ s}^{-1}$ , sendo que condições mais severas implicam valores menores para frequência de transporte.

Tabela 16: Parâmetros da cinética modificada para seis grupos de precursores

Parâmetro	Valor
$\Lambda$	0,00002 s
$\beta = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_6$	0,007
$\Sigma_a$	0,1718 $\text{cm}^{-1}$
D	10 cm
v	$3 \cdot 10^5 \text{ cm/s}$
fa	$51540 \text{ s}^{-1}$
$\tau$	$10^{-3} / 10^{-4} \text{ s}$

Tabela 17: Parâmetros dos Grupos Precusores para U-235

Grupo de precursores	$\lambda_i (s^{-1})$	$\beta_i$
1	0,0127	0,000266
2	0,0317	0,001491
3	0,115	0,001316
4	0,311	0,002849
5	1,40	0,000896
6	3,87	0,000182

#### 4.2.1 Inserção de reatividade tipo degrau

Assim como na subseção 4.1.1, que trata da cinética pontual clássica, foram consideradas três inserções de reatividade: inserção pronto-subcrítica de 300pcm, inserção pronto-crítica de 700pcm e inserção pronto-supercrítica de 800pcm. Os resultados obtidos são apresentados nas tabelas 18, 20 e 22.

Os resultados através do método PCA são então comparados com os obtidos pelo método de diferenças finitas, apresentados por Nunes (NUNES, A. L., 2015), com passo temporal de  $10^{-6}$  s. A solução exata da cinética pontual clássica é também apresentada, para critério de comparação (KINRAD, M. & ALLEN, E. J., 2004).

Calculam-se então os desvios relativos percentuais do método PCA para o método de referência, de diferenças finitas. Os resultados são comparados com os obtidos com o mesmo valor de  $\tau$ .

$$DRP = \left| \frac{n(t)_{PCA} - n(t)_{ref}}{n(t)_{ref}} \right| \cdot 100\% \quad (4.3)$$

Os desvios relativos percentuais calculados são apresentados nas tabelas 19, 21 e 23.

Tabela 18: Cálculo da população de nêutrons da cinética pontual modificada através de diferentes métodos. Reatividade tipo degrau igual a 300pcm

Método	t = 1,0s	t = 10s	t = 20s
PCA (h=0,1s) $\tau = 10^{-4}$ s	2,20888	8,01333	$2,82654 \cdot 10^1$
PCA (h=0,1s) $\tau = 10^{-3}$ s	2,20012	7,96040	$2,79789 \cdot 10^1$
Diferenças finitas $\tau = 10^{-4}$ s	2,20889	8,01328	$2,82650 \cdot 10^1$
Diferenças finitas $\tau = 10^{-3}$ s	2,20039	7,96101	$2,79807 \cdot 10^1$
Cinética pontual clássica – exata	2,20980	8,01920	$2,82970 \cdot 10^1$

Tabela 19: Desvio relativo percentual entre o método PCA e o método de referência, diferenças finitas. Reatividade tipo degrau igual a 300pcm

Método	t = 1,0s	t = 10s	t = 20s
Diferenças finitas $\tau = 10^{-4}$ s	0,00045	0,00062	0,001415
Diferenças finitas $\tau = 10^{-3}$ s	0,01227	0,00766	0,00643

Pela análise da tabela 19, notam-se desvios relativos consideravelmente maiores quando se tem  $\tau = 10^{-3}$  s. Para a inserção de reatividade de 300pcm, não se observa grande divergência da cinética pontual clássica para a cinética pontual modificada, tanto para frequência de transporte  $10^3$  quanto para  $10^4$  s<sup>-1</sup>.

Tabela 20: Cálculo da população de nêutrons da cinética pontual modificada através de diferentes métodos. Reatividade tipo degrau igual a 700pcm

Método	t = 0,01s	t = 0,5s	t = 2s
PCA (h=0,01s) $\tau = 10^{-4}$ s	3,94994	$2,97514 \cdot 10^3$	$2,49744 \cdot 10^{10}$
PCA (h=0,01s) $\tau = 10^{-3}$ s	2,21233	$2,70710 \cdot 10^2$	$5,62973 \cdot 10^6$
Diferenças finitas $\tau = 10^{-4}$ s	3,95463	$2,97481 \cdot 10^3$	$2,49504 \cdot 10^{10}$
Diferenças finitas $\tau = 10^{-3}$ s	2,29174	$2,71857 \cdot 10^2$	$5,65158 \cdot 10^6$
Cinética pontual clássica – exata	4,50880	$5,34590 \cdot 10^3$	$2,05910 \cdot 10^{11}$

Tabela 21: Desvio relativo percentual entre o método PCA e o método de referência, diferenças finitas. Reatividade tipo degrau igual a 700pcm

Método	t = 0,01s	t = 0,5s	t = 2s
Diferenças finitas $\tau = 10^{-4}\text{s}$	0,11860	0,01109	0,09619
Diferenças finitas $\tau = 10^{-3}\text{s}$	3,46505	0,42191	0,38661

Com a inserção de reatividade pronto-crítica de 700pcm, observa-se o desvio grande de 3,46% no instante inicial do transiente, ( $t = 0,01\text{s}$ ), com  $\tau = 10^{-3}\text{s}$ . O mesmo não acontece com  $\tau = 10^{-4}\text{s}$ , onde foi observado desvio máximo percentual de 0,11%. Com relação à cinética pontual clássica, esta apresenta crescimento mais rápido da população de nêutrons, chegando a ser ordens de grandeza maior que a cinética pontual modificada.

Tabela 22: Cálculo da população de nêutrons da cinética pontual modificada através de diferentes métodos. Reatividade tipo degrau igual a 800pcm

Método	t = 0,01s	t = 0,1s	t = 1s
PCA (h=0,01s) $\tau = 10^{-4}\text{s}$	5,17307	$6,12178 \cdot 10^2$	$1,77838 \cdot 10^{20}$
PCA (h=0,01s) $\tau = 10^{-3}\text{s}$	2,50318	$4,07905 \cdot 10^1$	$2,25472 \cdot 10^9$
Diferenças finitas $\tau = 10^{-4}\text{s}$	5,18009	$6,11999 \cdot 10^2$	$1,76198 \cdot 10^{20}$
Diferenças finitas $\tau = 10^{-3}\text{s}$	2,60955	$4,13621 \cdot 10^1$	$2,27915 \cdot 10^9$
Cinética pontual clássica – exata	6,20290	$1,41040 \cdot 10^3$	$6,16340 \cdot 10^{23}$

Tabela 23: Desvio relativo percentual entre o método PCA e o método de referência, diferenças finitas. Reatividade tipo degrau igual a 800pcm

Método	t = 0,01s	t = 0,1s	t = 1s
Diferenças finitas $\tau = 10^{-4}\text{s}$	0.13552	0.02925	0.93077
Diferenças finitas $\tau = 10^{-3}\text{s}$	4.07618	1.38194	1.07189

Por fim, tem-se a inserção de reatividade constante pronto-supercrítica 800pcm. Nesta situação, que é ainda mais extrema que a anterior, observa-se fenômeno semelhante de desvio grande no instante inicial do transiente, ( $t = 0,01s$ ), com  $\tau = 10^{-3} s$ . Para o caso da frequência de transporte  $10^4 s^{-1}$ , ocorre máximo desvio no final do transiente, com ( $t = 1,0s$ ). A tabela 22 mostra também que ocorre um desvio de muitas ordens de grandeza entre os modelos da cinética pontual clássica e cinética pontual modificada.

#### 4.2.2 Inserção de reatividade tipo rampa

As equações da cinética pontual modificada são resolvidas numericamente com uma inserção de reatividade tipo rampa, com velocidade “moderadamente rápida” de  $0,1/s$ , assim como foi proposto por Chao e Attard (CHAO, Y.A. & ATTARD, A., 1985):

$$\rho(t) = 0,1 \cdot t = 0,0007 \cdot t$$

Os parâmetros cinéticos e os dos seis grupos precursores são idênticos aos utilizados nas simulações com reatividade degrau.

As simulações são feitas com passo temporal de 0,001 e 0,0001 s, de maneira que se teste a sensibilidade da resposta a essa variação. Os resultados são apresentados nas tabelas 24 e 26, e comparados com os obtidos pelo método de diferenças finitas, apresentados por Diniz (DINIZ, R. C., 2017). A solução da cinética pontual clássica correspondente, calculada através do método PCA com passo temporal de 0,0001s é também apresentada como comparação.

São feitos cálculos dos desvios relativos percentuais dos resultados do método PCA com o método de referência, de diferenças finitas:

$$DRP = \left| \frac{n(t)_{PCA} - n(t)_{ref}}{n(t)_{ref}} \right| \cdot 100\% \quad (4.4)$$

Os resultados são mostrados nas tabelas 25 e 27, comparando de acordo com o tempo  $\tau$  correspondente.

São mostrados os gráficos 2 e 3, referentes às densidades de nêutrons em função do tempo, comparando-se a densidade de nêutrons da cinética pontual clássica, cinética pontual modificada com  $\tau = 10^{-3}$ s e cinética pontual modificada com  $\tau = 10^{-4}$ s. O gráfico 3 é mostrado numa escala de tempo reduzida, de maneira que se possam distinguir as curvas com mais facilidade.

Tabela 24: Cálculo da população de nêutrons da cinética pontual modificada através de diferentes métodos. Reatividade tipo rampa e passo  $h=0,001$ s

Tempo	PCA $\tau = 10^{-3}$ s	Diferenças finitas $\tau = 10^{-3}$ s	PCA $\tau = 10^{-4}$ s	Diferenças finitas $\tau = 10^{-4}$ s	PCA Cinética clássica
t = 2s	1,33596	1,33583	1,33809	1,33796	1,33823
t = 4s	2,21820	2,21783	2,22774	2,22737	2,22852
t = 6s	5,49652	5,49481	5,57486	5,57311	5,58241
t = 8s	$3,90654 \cdot 10^1$	$3,90352 \cdot 10^1$	$4,24043 \cdot 10^1$	$4,23697 \cdot 10^1$	$4,27934 \cdot 10^1$
t = 9s	$3,40437 \cdot 10^2$	$3,39924 \cdot 10^2$	$4,67905 \cdot 10^2$	$4,67082 \cdot 10^2$	$4,87696 \cdot 10^2$
t = 10s	$3,73409 \cdot 10^4$	$3,72105 \cdot 10^4$	$2,98746 \cdot 10^5$	$2,97080 \cdot 10^5$	$4,51721 \cdot 10^5$
t = 11s	$1,93155 \cdot 10^9$	$1,91712 \cdot 10^9$	$5,00610 \cdot 10^{14}$	$4,92958 \cdot 10^{14}$	$1,79919 \cdot 10^{16}$

Tabela 25: Cálculo do desvio relativo percentual do método PCA para o método de referência, de diferenças finitas. Reatividade tipo rampa e passo  $h=0,001$ s

Tempo	Diferenças finitas $\tau = 10^{-3}$ s	Diferenças finitas $\tau = 10^{-4}$ s
t = 2s	0.00973	0.00972
t = 4s	0.01668	0.01661

t = 6s	0.03112	0.03140
t = 8s	0.07737	0.08166
t = 9s	0.15092	0.17620
t = 10s	0.35044	0.56079
t = 11s	0.75269	1.55226

Tabela 26: Cálculo da população de nêutrons da cinética pontual modificada através de diferentes métodos. Reatividade tipo rampa e passo  $h=0,0001s$

Tempo	PCA $\tau = 10^{-3}s$	Diferenças finitas $\tau = 10^{-3}s$	PCA $\tau = 10^{-4}s$	Diferenças finitas $\tau = 10^{-4}s$	PCA Cinética clássica
t = 2s	1,33585	1,33583	1,33798	1,33796	1,33823
t = 4s	2,21787	2,21783	2,22741	2,22737	2,22852
t = 6s	5,49498	5,49481	5,57329	5,57311	5,58241
t = 8s	$3,90382 \cdot 10^1$	$3,90352 \cdot 10^1$	$4,23731 \cdot 10^1$	$4,236967 \cdot 10^1$	$4,27934 \cdot 10^1$
t = 9s	$3,39975 \cdot 10^2$	$3,39923 \cdot 10^2$	$4,67164 \cdot 10^2$	$4,670813 \cdot 10^2$	$4,87696 \cdot 10^2$
t = 10s	$3,72230 \cdot 10^4$	$3,72100 \cdot 10^4$	$2,97236 \cdot 10^5$	$2,97068 \cdot 10^5$	$4,51721 \cdot 10^5$
t = 11s	$1,91829 \cdot 10^9$	$1,91682 \cdot 10^9$	$4,93204 \cdot 10^{14}$	$4,92394 \cdot 10^{14}$	$1,79919 \cdot 10^{16}$

Tabela 27: Cálculo do desvio relativo percentual do método PCA para o método de referência, de diferenças finitas. Reatividade tipo rampa e passo  $h=0,0001s$

Tempo	Diferenças finitas $\tau = 10^{-3}s$	Diferenças finitas $\tau = 10^{-4}s$
t = 2s	0.00150	0.00149
t = 4s	0.00180	0.00180
t = 6s	0.00309	0.00323
t = 8s	0.00774	0.00809
t = 9s	0.01530	0.01770

t = 10s	0.03494	0.05655
t = 11s	0.07669	0.16450

Pode-se perceber pela análise dos resultados das tabelas 24 e 25, que os desvios relativos percentuais calculados, mesmo com o passo maior de  $h=0,001s$  se mostraram baixos no início do transiente, crescendo de maneira progressiva com o aumento de reatividade inserida até os máximos de 0,75% e 1,55%, para a cinética modificada com  $\tau=10^{-3}s$  e  $\tau=10^{-4}s$ , respectivamente.

Ao se diminuir o passo para  $h=0,0001s$ , observa-se uma redução dos desvios encontrados de praticamente uma ordem de grandeza, obtendo-se os máximos de 0,077% e 0,164%, para a cinética modificada com  $\tau=10^{-3}s$  e  $\tau=10^{-4}s$ , respectivamente. O comportamento observado sugere a necessidade de utilização de passos temporais bem pequenos para transientes com grande inserção de reatividade.

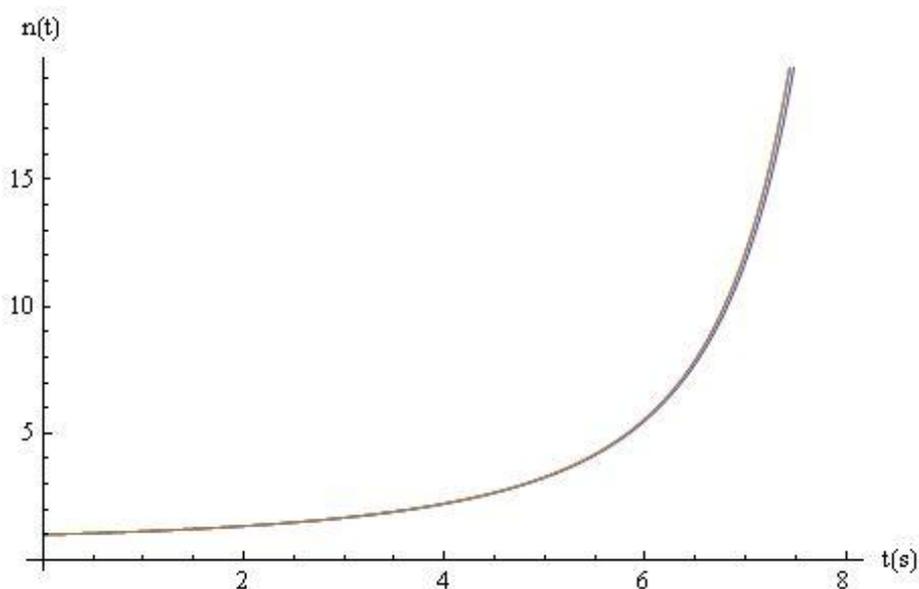


Figura 2: Gráfico das populações de nêutrons da cinética pontual clássica (curva amarela), cinética pontual modificada  $\tau = 10^{-3}s$  (curva azul) e cinética pontual modificada  $\tau = 10^{-4}s$  (curva vermelha). Reatividade tipo rampa.

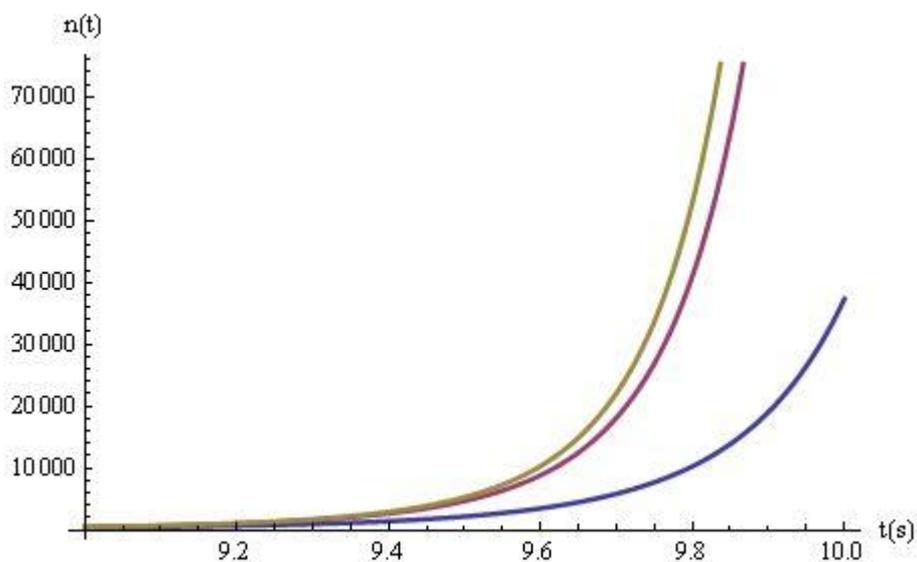


Figura 3: Comparação entre cinética pontual clássica (curva amarela), cinética pontual modificada  $\tau = 10^{-3}$  s (curva azul) e cinética pontual modificada  $\tau = 10^{-4}$  s (curva vermelha). Reatividade tipo rampa.

Nota-se pela análise do gráfico 2 que as curvas da cinética pontual clássica (amarela), cinética pontual modificada  $\tau = 10^{-3}$  (curva azul) e cinética pontual modificada  $\tau = 10^{-4}$  s (curva vermelha) praticamente se sobrepõe na escala de tempo até 8s, pois as densidades de nêutrons são muito próximas.

O gráfico 3, mostrado na escala de tempo a partir de 9s, demonstra a diferenciação entre os modelos quando a reatividade aumenta a ponto de chegar próximo da fração de nêutrons atrasados  $\beta = 0,007$ .

## 5 CONCLUSÃO

A relevância da cinética pontual clássica dentro da área de Física de Reatores pode ser comprovada devido à quantidade de métodos de solução desenvolvidos na literatura científica, *e.g.*: Método de Confinamento da Rigidez (CHAO, Y.A. & ATTARD, A., 1985), Método de Runge-Kutta Generalizado (SÁNCHEZ, J., 1989), Método de Hansen (HANSEN *et al.*, 1965), Método PCA (KINRAD, M. & ALLEN, E. J., 2004), entre outros.

Existem ainda formulações alternativas, que foram desenvolvidas com o intuito de aproximar os resultados obtidos pela cinética pontual daqueles obtidos por teorias mais gerais, como o caso da Teoria do Transporte de Nêutrons. Destacam-se entre essas o modelo chamado Cinética Pontual Fracionária, introduzido por Espinosa-Paredes (ESPINOSA-PAREDES *et al.*, 2011) e Cinética Pontual Modificada, proposto por Nunes (NUNES, A. L., 2015) e abordado nesta dissertação.

A Cinética Pontual Modificada consiste em não se desprezar a derivada do logaritmo da corrente de nêutrons, obtendo-se assim um sistema de equações diferenciais com termos a mais em relação à cinética pontual clássica. Devido à presença destes termos, foi sugerida uma alteração no método PCA para tornar possível a solução do sistema modificado.

No capítulo 4 foram apresentados os resultados do método PCA na cinética pontual clássica. O método se mostrou bastante eficiente para resolver o sistema com reatividade constante, tipo degrau. Independentemente da intensidade de reatividade inserida, os desvios encontrados se mantiveram na ordem de milésimos percentuais – tabelas 4, 6 e 8.

Para o caso da reatividade variante no tempo, foi necessário utilizar passos temporais menores, especialmente no caso da rampa. O desvio relativo percentual tendia a crescer quando o tempo aumentava e o sistema se tornava pronto-supercrítico. Os resultados obtidos no caso do sistema com reatividade senoidal se mostraram em consonância com o Método de Hansen, ficando o desvio relativo calculado na ordem dos milésimos percentuais.

A aplicação do método PCA na cinética modificada conduziu a alguns resultados curiosos. Os desvios relativos calculados foram mínimos para a reatividade degrau pronto-subcrítica, de 300pcm, ao passo que, para os casos prontocrítico e pronto-supercrítico, eles foram apreciáveis, especialmente nos instantes iniciais dos transientes. Observa-se neste aspecto, a necessidade de outros métodos numéricos para comparação, ou até mesmo a busca de um método analítico para confrontação dos resultados.

A reatividade variante no tempo tipo rampa mostrou-se em concordância com o método de diferenças finitas, ressaltando-se a necessidade de utilização de passo temporal bem pequeno, de  $h=0,0001s$ .

A análise dos gráficos 2 e 3 indica que os modelos da cinética pontual clássica e modificada praticamente se sobrepõem enquanto a reatividade inserida permanece pequena. Segundo Nunes (NUNES, A. L., 2015), modelos tendem a se distanciar em situações extremas, onde o fator de multiplicação é bem menor que a unidade (fortemente subcrítico) ou bem maior que a unidade (fortemente supercrítico).

Para trabalhos futuros, complementares a este projeto, as seguintes linhas de pesquisa são sugeridas:

- 1) Cinética pontual modificada com seis grupos precursores de nêutrons e inserção de reatividade tipo senoidal.
- 2) Aplicação de outros métodos utilizados na cinética pontual clássica, como por exemplo, o método de confinamento da rigidez ou o método de Runge-Kutta generalizado na cinética pontual modificada.
- 3) Comparação entre os resultados obtidos pela cinética pontual clássica, cinética pontual modificada e teoria do transporte de nêutrons.
- 4) Inclusão de efeitos de realimentação de temperatura no modelo da cinética pontual modificada.

## 6 REFERÊNCIAS

DUDERSTADT, J. J. & HAMILTON, L. J., **Nuclear Reactor Analysis**. New York, John Wiley & Sons, 1976.

HETRICK, D. L., **Dynamics of Nuclear Reactors**. Chicago, The University of Chicago Press, 1993.

STACEY, W. M., **Nuclear Reactor Physics**. Weinheim, Wiley-VCH, 2007.

LAMARSH, J. R., **Introduction to Nuclear Reactor Theory**. New York, Addison-Wesley Publishing Company, 2002.

KINRAD, M. & ALLEN, E. J., "Efficient numerical solution of the point kinetics equations in nuclear reactor dynamics", **Annals of Nuclear Energy**, v. 31, pp 1039-1051, 2004.

NUNES, A. L., "A Influência da Aproximação Referente à Derivada da Corrente de Nêutrons nas Equações da Cinética Pontual", Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, Abril de 2015.

DINIZ, R. C., "Correção do Parâmetro de Tempo Médio de Geração de Nêutrons nas Equações da Cinética Pontual de Nêutrons", Projeto de Graduação, UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, Fevereiro de 2017.

ESPINOSA-PAREDES, G., POLO-LABARRIOS, M. A., ESPINOSA-MARTÍNEZ, E. G., et al., "Fractional neutron point kinetics equations for nuclear reactor dynamics", **Annals of Nuclear Energy**, v. 38, pp. 307-330, 2011.

CHAO, Y.A. & ATTARD, A., "A Resolution of the Stiffness Problem of Reactor Kinetics", **Nuclear Science and Engineering**, v.90, pp. 40-46, 1985.

HANSEN, K. F., KOEN, B. V., LITTLE JR, W. W., "Stable Numerical Solutions of the Reactor Kinetics Equations", **Nuclear Science and Engineering**, v.22, p.51-59, 1965.

PETERSEN, C. Z., DULLA, S., VILHENA, M. T. M. B., RAVETTO, P., "An Analytical Solution of the Point Kinetics Equations with Time-Variable Reactivity by the Decomposition Method", **Progress in Nuclear Energy**, v.53, p.1091-1094, 2011.

SÁNCHEZ, J., "On the Numerical Solution of the Point Reactor Kinetics Equations by Generalized Runge-Kutta Methods", **Nuclear Science and Engineering**, v.103, p.94-99, 1989.

NAHLA, A. A., "An analytical solution for the point reactor kinetics equations with One group of delayed neutrons and the adiabatic feedback model", **Progress in Nuclear Energy**, v.51, p.124-128, 2009.

CHEN, W., GUO, L., ZHU, B., LI, H., "Accuracy of analytical methods for obtaining supercritical transients with temperature feedback", **Progress in Nuclear Energy**, v.49, p.290-302, 2007.

LI, H., CHEN, W., ZHANG, F., LUO, L., "Approximate solutions of point kinetics equations with one delayed neutron group and temperature feedback during delayed supercritical process ", **Annals of Nuclear Energy**, v.34, p.521-526, 2007.

SAITO, K., "An application of Novikov-Furutsu formula to solving stochastic point reactor kinetics having a Gaussian parametric noise with an arbitrary spectral profile", **Annals of Nuclear Energy**, v.6, p.591-593, 1979.

BEHRINGER, K., PIÑEYRO, J., MENNING, J., "Application of the Wiener-Hermite functional method to point reactor kinetics driven by random reactivity fluctuations", **Annals of Nuclear Energy**, v.17, p.643-656, 1990.

HAYES, J. G. & ALLEN, E. J., "Stochastic point-kinetics equations in nuclear reactor dynamics", **Annals of Nuclear Energy**, v.32, p.572-587, 2005.

PEINETTI, F., NICOLINO, C., RAVETTO, P., “Kinetics of a point reactor in the presence of reactivity oscillations”, **Annals of Nuclear Energy**, v.33, p.1189-1195, 2006.

RAVETTO, P., “Reactivity oscillations in a point reactor”, **Annals of Nuclear Energy**, v.24, p.303-314, 1997

DULLA, S., NICOLINO, C., RAVETTO, P., “Reactivity oscillation in source driven systems”, **Nuclear Engineering and Technology**, v.38, p.657-664, 2006.

KANG, C. M. & HANSEN, K. F., “Finite Element Methods for Reactor Analysis”, **Nuclear Engineering and Engineering**, v.51, p.456-495, 1973.

INTERNATIONAL ATOMIC ENERGY AGENCY, IAEA, “Nuclear Power in the 21th Century”, (2017). Disponível em: <https://www.iaea.org/topics/energy>. Acessado em 29 de Março de 2019.

INTERNATIONAL ATOMIC ENERGY AGENCY, IAEA, “Nuclear Power and climate change”, (2018). Disponível em: <https://www.iaea.org/topics/nuclear-power-and-climate-change#>. Acessado em 29 de Março de 2019.

BOYCE, E.W., & DIPRIMA, R.C., **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. Rio de Janeiro, LTC, 2002.