Modelos e técnicas para epidemias na rede

Wellington G. Dantas

4 de março de 2010

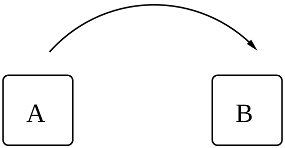
Sumário

- Condições de equilíbrio para um sistema físico: balanço detalhado

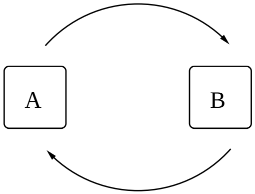
$$W(n,m)P_{eq}(m) = W(m,n)P_{eq}(n), \forall(n,m)$$

- Condições de equilíbrio para um sistema físico: balanço detalhado

- Condições de equilíbrio para um sistema físico: balanço detalhado

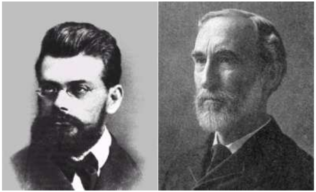


- Condições de equilíbrio para um sistema físico: balanço detalhado



- Condições de equilíbrio para um sistema físico: balanço detalhado

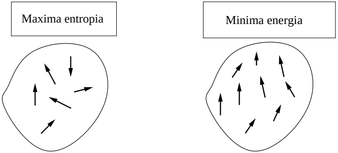
- No equilíbrio existe uma teoria bem fundamentada: *teoria de ensembles*.



- Comportamento coletivo dos graus de liberdade em grandes escalas.
- Transições de fase, em geral, ocorrem pela competição ordem-desordem (energia vs. entropia)
- A transição fica caracterizada por quantidades como ponto crítico e expoentes críticos.
- Sistemas físico distintos podem apresentar as mesmas propriedades críticas.
- Indício de que simetrias essenciais determinam o mesmo comportamento.

- Comportamento coletivo dos graus de liberdade em grandes escalas.
- Transições de fase, em geral, ocorrem pela competição ordem-desordem (energia vs. entropia)

$$H = -J \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j$$



- A transição fica caracterizada por quantidades como ponto crítico e expoentes críticos.
- Sistemas físico distintos podem apresentar as mesmas propriedades críticas.
- Indício de que simetrias essenciais determinam o mesmo comportamento.

- Comportamento coletivo dos graus de liberdade em grandes escalas.
- Transições de fase, em geral, ocorrem pela competição ordem-desordem (energia vs. entropia)

- A transição fica caracterizada por quantidades como ponto crítico e expoentes críticos.
- Sistemas físico distintos podem apresentar as mesmas propriedades críticas.
- Indício de que simetrias essenciais determinam o mesmo comportamento.

- Comportamento coletivo dos graus de liberdade em grandes escalas.
- Transições de fase, em geral, ocorrem pela competição ordem-desordem (energia vs. entropia)

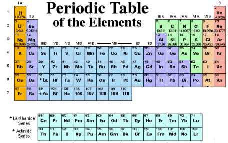
- A transição fica caracterizada por quantidades como ponto crítico e expoentes críticos.
- Sistemas físico distintos podem apresentar as mesmas propriedades críticas.
- Indício de que simetrias essenciais determinam o mesmo comportamento.

- Comportamento coletivo dos graus de liberdade em grandes escalas.
- Transições de fase, em geral, ocorrem pela competição ordem-desordem (energia vs. entropia)

- A transição fica caracterizada por quantidades como ponto crítico e expoentes críticos.
- Sistemas físico distintos podem apresentar as mesmas propriedades críticas.
- Indício de que simetrias essenciais determinam o mesmo comportamento.

Objetivos do estudo de transições de fases

- Categorizar os sistemas que apresentam as mesmas simetrias essenciais $\Longrightarrow$ Classes de Universalidade.



- No equilíbrio existe um esquema de classificação para transições contínuas em duas dimensões, graças à Teoria de Campo Conforme.
- A busca deste esquema leva à necessidade do desenvolvimento de ferramentas precisas para estimativa ou determinação de propriedades críticas.

Objetivos do estudo de transições de fases

- Categorizar os sistemas que apresentam as mesmas simetrias essenciais $\Longrightarrow$ Classes de Universalidade.

- No equilíbrio existe um esquema de classificação para transições contínuas em duas dimensões, graças à Teoria de Campo Conforme.
- A busca deste esquema leva à necessidade do desenvolvimento de ferramentas precisas para estimativa ou determinação de propriedades críticas.

Objetivos do estudo de transições de fases

- Categorizar os sistemas que apresentam as mesmas simetrias essenciais $\Longrightarrow$ Classes de Universalidade.

- No equilíbrio existe um esquema de classificação para transições contínuas em duas dimensões, graças à Teoria de Campo Conforme.
- A busca deste esquema leva à necessidade do desenvolvimento de ferramentas precisas para estimativa ou determinação de propriedades críticas.

Sumário

O processo de contato

- Numa rede *d*-dimensional sítios estão ocupados ou vazios.
- Um sítio vazio torna-se ocupado com uma taxa $\lambda n/z$, sendo n o número de primeiros vizinhos ocupados e z a conectividade da rede.

  $$\bullet \circ \circ \xrightarrow{\lambda/2} \bullet \bullet \circ$$

- Um sítio ocupado se esvazia com uma taxa unitária.

  $$\bullet \xrightarrow{1} \circ$$

- Estado absorvente (rede vazia) é um estado estacionário trivial.
- Existiria outro estado estacionário para algum valor de λ? Resposta positiva dada por prova rigorosa da existência de tal estado.

- Numa rede *d*-dimensional sítios estão ocupados ou vazios.
- Um sítio vazio torna-se ocupado com uma taxa $\lambda n/z$, sendo *n* o número de primeiros vizinhos ocupados e *z* a conectividade da rede.

$$\bullet \circ \circ \xrightarrow{\lambda/2} \bullet \bullet \circ$$

- Um sítio ocupado se esvazia com uma taxa unitária.

$$\bullet \xrightarrow{1} \circ$$

- Estado absorvente (rede vazia) é um estado estacionário trivial.
- Existiria outro estado estacionário para algum valor de λ? Resposta positiva dada por prova rigorosa da existência de tal estado.

O processo de contato

- Numa rede d-dimensional sítios estão ocupados ou vazios.
- Um sítio vazio torna-se ocupado com uma taxa $\lambda n/z$, sendo n o número de primeiros vizinhos ocupados e z a conectividade da rede.
  $$\bullet \circ \circ \xrightarrow{\lambda/2} \bullet \bullet \circ$$
- Um sítio ocupado se esvazia com uma taxa unitária.
  $$\bullet \xrightarrow{1} \circ$$
- Estado absorvente (rede vazia) é um estado estacionário trivial.
- Existiria outro estado estacionário para algum valor de λ? Resposta positiva dada por prova rigorosa da existência de tal estado.

O processo de contato

- Numa rede *d*-dimensional sítios estão ocupados ou vazios.
- Um sítio vazio torna-se ocupado com uma taxa $\lambda n/z$, sendo n o número de primeiros vizinhos ocupados e z a conectividade da rede.

$$\bullet \; \circ \; \circ \xrightarrow{\lambda/2} \bullet \; \bullet \; \circ$$

- Um sítio ocupado se esvazia com uma taxa unitária.

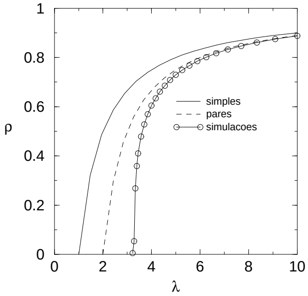
$$\bullet \xrightarrow{1} \circ$$

- Estado absorvente (rede vazia) é um estado estacionário trivial.
- Existiria outro estado estacionário para algum valor de λ? Resposta positiva dada por prova rigorosa da existência de tal estado.

O processo de contato

- Numa rede d-dimensional sítios estão ocupados ou vazios.
- Um sítio vazio torna-se ocupado com uma taxa $\lambda n/z$, sendo n o número de primeiros vizinhos ocupados e z a conectividade da rede.
  $$\bullet \circ \circ \xrightarrow{\lambda/2} \bullet \bullet \circ$$
- Um sítio ocupado se esvazia com uma taxa unitária.
  $$\bullet \xrightarrow{1} \circ$$
- Estado absorvente (rede vazia) é um estado estacionário trivial.
- Existiria outro estado estacionário para algum valor de λ? Resposta positiva dada por prova rigorosa da existência de tal estado.

- Transição contínua, mesmo em 1d, entre uma fase ativa e outra absorvente.



- $\rho \sim (\lambda - \lambda_c)^{\beta}$
- $N \sim t^{\theta}$
- $P_s \sim t^{-\delta}$
- $\rho \sim L^{\beta/\nu_\perp}$
- $\tau \sim L^{\nu_\parallel/\nu_\perp}$

- Existência de expoentes críticos que pertencem à classe da Percolação Direcionada (DP).
- Quais as simetrias relevantes para que o PC possua estes expoentes?
- Inexistência de um esquema de classificação para universalidades.
- Conjectura DP: qualquer modelo com um estado absorvente, parâmetro de ordem escalar, interações de curto alcance e sem campos conservados pertence à classe DP.

- Transição contínua, mesmo em 1d, entre uma fase ativa e outra absorvente.
- Existência de expoentes críticos que pertencem à classe da Percolação Direcionada (DP).
- Quais as simetrias relevantes para que o PC possua estes expoentes?
- Inexistência de um esquema de classificação para universalidades.
- Conjectura DP: qualquer modelo com um estado absorvente, parâmetro de ordem escalar, interações de curto alcance e sem campos conservados pertence à classe DP.

- Transição contínua, mesmo em 1d, entre uma fase ativa e outra absorvente.

- Existência de expoentes críticos que pertencem à classe da Percolação Direcionada (DP).
- Quais as simetrias relevantes para que o PC possua estes expoentes?
- Inexistência de um esquema de classificação para universalidades.
- Conjectura DP: qualquer modelo com um estado absorvente, parâmetro de ordem escalar, interações de curto alcance e sem campos conservados pertence à classe DP.

- Transição contínua, mesmo em 1d, entre uma fase ativa e outra absorvente.

- Existência de expoentes críticos que pertencem à classe da Percolação Direcionada (DP).
- Quais as simetrias relevantes para que o PC possua estes expoentes?
- Inexistência de um esquema de classificação para universalidades.
- Conjectura DP: qualquer modelo com um estado absorvente, parâmetro de ordem escalar, interações de curto alcance e sem campos conservados pertence à classe DP.

- Transição contínua, mesmo em 1d, entre uma fase ativa e outra absorvente.

- Existência de expoentes críticos que pertencem à classe da Percolação Direcionada (DP).
- Quais as simetrias relevantes para que o PC possua estes expoentes?
- Inexistência de um esquema de classificação para universalidades.
- Conjectura DP: qualquer modelo com um estado absorvente, parâmetro de ordem escalar, interações de curto alcance e sem campos conservados pertence à classe DP.

A pilha de areia de Manna

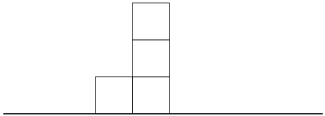
- Numa rede com L sitios distribuem-se, aleatoriamente, N partículas, $\zeta = N/L$.
- Todos os sítios ocupados por pelo menos duas partículas são ditos ativos.
- Os sítios ativos realizam as seguintes transições:

A pilha de areia de Manna

- Numa rede com L sitios distribuem-se, aleatoriamente, N partículas, $\zeta = N/L$.
- Todos os sítios ocupados por pelo menos duas partículas são ditos ativos.
- Os sítios ativos realizam as seguintes transições:

A pilha de areia de Manna

- Numa rede com L sitios distribuem-se, aleatoriamente, N partículas, $\zeta = N/L$.
- Todos os sítios ocupados por pelo menos duas partículas são ditos ativos.
- Os sítios ativos realizam as seguintes transições:



A pilha de areia de Manna

- Numa rede com L sitios distribuem-se, aleatoriamente, N partículas, $\zeta = N/L$.
- Todos os sítios ocupados por pelo menos duas partículas são ditos ativos.
- Os sítios ativos realizam as seguintes transições:

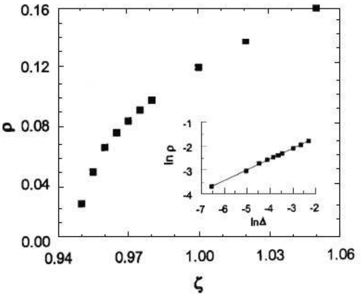
A pilha de areia de Manna

- Numa rede com L sitios distribuem-se, aleatoriamente, N partículas, $\zeta = N/L$.
- Todos os sítios ocupados por pelo menos duas partículas são ditos ativos.
- Os sítios ativos realizam as seguintes transições:

- Dinâmica conserva o número de partículas.
- Se $\rho > 1$ existe um estado ativo. Existiria um estado absorvente para $\rho \leq 1$?
- Parâmetro de ordem: número de sítios ativos. Parâmetro de controle: densidade de partículas. Acoplamento entre parâmetros.
- Expoentes críticos distintos da classe DP.

- Dinâmica conserva o número de partículas.
- Se $\rho > 1$ existe um estado ativo. Existiria um estado absorvente para $\rho \leq 1$?
- Parâmetro de ordem: número de sítios ativos. Parâmetro de controle: densidade de partículas. Acoplamento entre parâmetros.
- Expoentes críticos distintos da classe DP.

- Dinâmica conserva o número de partículas.
- Se $\rho > 1$ existe um estado ativo. Existiria um estado absorvente para $\rho \leq 1$?



- Parâmetro de ordem: número de sítios ativos. Parâmetro de controle: densidade de partículas. Acoplamento entre parâmetros.
- Expoentes críticos distintos da classe DP.

- Dinâmica conserva o número de partículas.
- Se $\rho > 1$ existe um estado ativo. Existiria um estado absorvente para $\rho \leq 1$?

- Parâmetro de ordem: número de sítios ativos. Parâmetro de controle: densidade de partículas. Acoplamento entre parâmetros.
- Expoentes críticos distintos da classe DP.

- Dinâmica conserva o número de partículas.
- Se $\rho > 1$ existe um estado ativo. Existiria um estado absorvente para $\rho \leq 1$?

- Parâmetro de ordem: número de sítios ativos. Parâmetro de controle: densidade de partículas. Acoplamento entre parâmetros.
- Expoentes críticos distintos da classe DP.

PC com criação por pares

- $\bullet\ \bullet\ \circ\circ \xrightarrow{\lambda/2} \bullet\ \bullet\ \bullet\circ$
- $\bullet \xrightarrow{1} \circ$
- O vácuo é novamente o estado absorvente para este sistema.
- Qual a classe de universalidade deste modelo? Resposta: a mesma do PC ordinário.

PC com criação por pares

- $\bullet\ \bullet\ \circ\circ \xrightarrow{\lambda/2} \bullet\ \bullet\ \bullet\circ$
- $\bullet \xrightarrow{1} \circ$
- O vácuo é novamente o estado absorvente para este sistema.
- Qual a classe de universalidade deste modelo? Resposta: a mesma do PC ordinário.

PC com criação por pares

- $\bullet \; \bullet \; \circ\circ \xrightarrow{\lambda/2} \bullet \; \bullet \; \bullet\circ$
- $\bullet \xrightarrow{1} \circ$

- O vácuo é novamente o estado absorvente para este sistema.
- Qual a classe de universalidade deste modelo? Resposta: a mesma do PC ordinário.

PC com criação por pares

- $\bullet\;\bullet\;\circ\circ \xrightarrow{\lambda/2} \bullet\;\bullet\;\bullet\circ$
- $\bullet \xrightarrow{1} \circ$

- O vácuo é novamente o estado absorvente para este sistema.
- Qual a classe de universalidade deste modelo? Resposta: a mesma do PC ordinário.

PC com criação por pares

- $\bullet\ \ \bullet\ \ \circ\circ \ \xrightarrow{\lambda/2}\ \bullet\ \ \bullet\ \ \bullet\circ$
- $\bullet \ \xrightarrow{1}\ \circ$
- O vácuo é novamente o estado absorvente para este sistema.
- Qual a classe de universalidade deste modelo? Resposta: a mesma do PC ordinário.

Sumário

Campo médio no PC

- A equação para a evolução da densidade de sítios ativos do PC é dada por

$$\frac{d}{dt}\rho = \lambda\phi - \rho,$$

onde $\rho = \langle \sigma_i \rangle$ e $\phi = \langle \eta_i \eta_{i+\delta} \rangle, \forall i, \delta = \pm 1$.

- Uma aproximação possível para resolvermos esta equação seria $\phi = \rho^2$. Para $t \to \infty$

$$\rho = \frac{\lambda - 1}{\lambda},$$

tal que $\lambda_c = 1$ e $\beta = 1$

Campo médio no PC

- A equação para a evolução da densidade de sítios ativos do PC é dada por

$$\frac{d}{dt}\rho = \lambda\phi - \rho,$$

onde $\rho = \langle\sigma_i\rangle$ e $\phi = \langle\eta_i\eta_{i+\delta}\rangle, \forall i, \delta = \pm 1$.

- Uma aproximação possível para resolvermos esta equação seria $\phi = \rho^2$. Para $t \to \infty$

$$\rho = \frac{\lambda - 1}{\lambda},$$

tal que $\lambda_c = 1$ e $\beta = 1$

Campo médio no PC

- Podemos calcular um sistema de equações para ρ e ϕ, mas este último dependerá de média de três sítios.
- Numa aproximação que leve em conta apenas pares temos $\lambda_c = 2$ e $\beta = 1$.

Valores críticos	CM	$d = 1$	$d = 2$	$d = 3$
λ_c	1	3.2979	1.649	1.317
β	1	0.276486(8)	0.584(4)	0.81(1)
$\nu_\perp$	1/2	1.096854(4)	0.734(4)	0.581(5)
$\nu_\parallel$	1	1.733847(6)	1.295(6)	1.105(5)
z	2	1.580745(10)	1.76(3)	1.90(1)

- Dimensão crítica superior $d_c = 4$.

Campo médio no PC

- Podemos calcular um sistema de equações para ρ e ϕ, mas este último dependerá de média de três sítios.
- Numa aproximação que leve em conta apenas pares temos $\lambda_c = 2$ e $\beta = 1$.

Valores críticos	CM	$d = 1$	$d = 2$	$d = 3$
λ_c	1	3.2979	1.649	1.317
β	1	0.276486(8)	0.584(4)	0.81(1)
$\nu_\perp$	1/2	1.096854(4)	0.734(4)	0.581(5)
$\nu_\parallel$	1	1.733847(6)	1.295(6)	1.105(5)
z	2	1.580745(10)	1.76(3)	1.90(1)

- Dimensão crítica superior $d_c = 4$.

Campo médio no PC

- Podemos calcular um sistema de equações para ρ e ϕ, mas este último dependerá de média de três sítios.
- Numa aproximação que leve em conta apenas pares temos $\lambda_c = 2$ e $\beta = 1$.

Valores críticos	CM	$d = 1$	$d = 2$	$d = 3$
λ_c	1	3.2979	1.649	1.317
β	1	0.276486(8)	0.584(4)	0.81(1)
$\nu_\perp$	1/2	1.096854(4)	0.734(4)	0.581(5)
$\nu_\parallel$	1	1.733847(6)	1.295(6)	1.105(5)
z	2	1.580745(10)	1.76(3)	1.90(1)

- Dimensão crítica superior $d_c = 4$.

Formulação operatorial da equação mestra

- Tomando a equação mestra

$$\frac{d}{dt}P(\eta,t)=\sum_i[w_i(\eta^i)P(\eta^i,t)-w_i(\eta)P(\eta,t)],$$

sendo $w(\eta)$ a taxa de transição e η^i a configuração η alterada no sítio i.

- Definindo o vetor estado $|\psi(t)\rangle=\sum_\eta P(\eta,t)|\eta\rangle$, com $\langle\eta\prime|\eta\rangle=\delta_{\eta\prime,\eta}$, de modo que a normalização é dada por $\langle\ |\psi(t)\rangle=1$, onde $\langle\ |$ representa o projetor $\sum_{\eta\prime}\langle\eta\prime|$, reescrevemos a equação mestra como

$$\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle=\mathbb{S}|\psi(t)\rangle,$$

onde $\mathbb{S}$ é o operador de evolução temporal dado por $\mathbb{S}=\sum_i[\mathbb{F}_i-1]\mathbb{Z}_i$, com $\mathbb{F}_i|\eta\rangle=|\eta^i\rangle$ e $\mathbb{Z}_i|\eta\rangle=w_i(\eta)|\eta\rangle$.

Formulação operatorial da equação mestra

- Tomando a equação mestra

$$\frac{d}{dt}P(\eta,t) = \sum_i [w_i(\eta^{i})P(\eta^{i},t) - w_i(\eta)P(\eta,t)],$$

  sendo $w(\eta)$ a taxa de transição e η^i a configuração η alterada no sítio i.
- Definindo o vetor estado $|\psi(t)\rangle = \sum_\eta P(\eta,t)|\eta\rangle$, com $\langle\eta\prime|\eta\rangle = \delta_{\eta\prime,\eta}$, de modo que a normalização é dada por $\langle\ |\psi(t)\rangle = 1$, onde $\langle\ |$ representa o projetor $\sum_{\eta\prime}\langle\eta\prime|$, reescrevemos a equação mestra como

$$\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \mathbb{S}|\psi(t)\rangle,$$

  onde $\mathbb{S}$ é o operador de evolução temporal dado por $\mathbb{S} = \sum_i [\mathbb{F}_i - 1]\mathbb{Z}_i$, com $\mathbb{F}_i|\eta\rangle = |\eta^i\rangle$ e $\mathbb{Z}_i|\eta\rangle = w_i(\eta)|\eta\rangle$.

- Definindo o estado $|\eta\rangle = \prod_i \otimes\eta_i$ e a álgebra de operadores

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_i^\dagger|\eta\rangle &= (1-\eta_i)|\eta^i\rangle \\ \mathbb{A}_i|\eta\rangle &= \eta_i|\eta^i\rangle \end{aligned}$$

- Com isso temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{N}_i &= \mathbb{A}_i^\dagger\mathbb{A}_i, \quad \mathbb{F}_i = \mathbb{A}_i^\dagger + \mathbb{A}_i \\ [\mathbb{A}_i^\dagger, \mathbb{A}_i] &= 2\eta_i - 1, \quad \{\mathbb{A}_i^\dagger, \mathbb{A}_i\}_+ = 1 \end{aligned}$$

- Operador de evolução para PC

$$\mathbb{S} = \sum_i [\frac{\lambda}{2}(\mathbb{A}_i^\dagger - \mathbb{A}_i\mathbb{A}_i^\dagger)(\mathbb{A}_{i-1}^\dagger\mathbb{A}_{i-1} + \mathbb{A}_{i+1}^\dagger\mathbb{A}_{i+1}) + (\mathbb{A}_i^\dagger - \mathbb{A}_i^\dagger\mathbb{A}_i)]$$

- Definindo o estado $|\eta\rangle = \prod_i \otimes \eta_i$ e a álgebra de operadores

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_i^\dagger|\eta\rangle &= (1-\eta_i)|\eta^i\rangle \\ \mathbb{A}_i|\eta\rangle &= \eta_i|\eta^i\rangle \end{aligned}$$

- Com isso temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{N}_i &= \mathbb{A}_i^\dagger\mathbb{A}_i, \quad \mathbb{F}_i = \mathbb{A}_i^\dagger + \mathbb{A}_i \\ [\mathbb{A}_i^\dagger, \mathbb{A}_i] &= 2\eta_i - 1, \quad \{\mathbb{A}_i^\dagger, \mathbb{A}_i\}_+ = 1 \end{aligned}$$

- Operador de evolução para PC

$$\mathbb{S} = \sum_i [\frac{\lambda}{2}(\mathbb{A}_i^\dagger - \mathbb{A}_i\mathbb{A}_i^\dagger)(\mathbb{A}_{i-1}^\dagger\mathbb{A}_{i-1} + \mathbb{A}_{i+1}^\dagger\mathbb{A}_{i+1}) + (\mathbb{A}_i^\dagger - \mathbb{A}_i^\dagger\mathbb{A}_i)]$$

- Definindo o estado $|\eta\rangle = \prod_i \otimes \eta_i$ e a álgebra de operadores

$$
\begin{aligned}
\mathbb{A}_i^\dagger|\eta\rangle &= (1-\eta_i)|\eta^i\rangle \\
\mathbb{A}_i|\eta\rangle &= \eta_i|\eta^i\rangle
\end{aligned}
$$

- Com isso temos que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{N}_i &= \mathbb{A}_i^\dagger \mathbb{A}_i, \qquad \mathbb{F}_i = \mathbb{A}_i^\dagger + \mathbb{A}_i \\
[\mathbb{A}_i^\dagger, \mathbb{A}_i] &= 2\eta_i - 1, \qquad \{\mathbb{A}_i^\dagger, \mathbb{A}_i\}_+ = 1
\end{aligned}
$$

- Operador de evolução para PC

$$
\mathbb{S} = \sum_i [\frac{\lambda}{2}(\mathbb{A}_i^\dagger - \mathbb{A}_i\mathbb{A}_i^\dagger)(\mathbb{A}_{i-1}^\dagger \mathbb{A}_{i-1} + \mathbb{A}_{i+1}^\dagger \mathbb{A}_{i+1}) + (\mathbb{A}_i^\dagger - \mathbb{A}_i^\dagger \mathbb{A}_i)]
$$

Expansão supercrítica

- Fazendo uma transformação de Laplace sobre a solução formal da equação mestra, temos

$$|\tilde{\psi}(z)\rangle = (z - \mathbb{S})^{-1}|\psi(0)\rangle,$$

com o estado estacionário dado por $|\psi(\infty)\rangle = lim_{z\to 0} z|\tilde{\psi}(z)\rangle$.

- Supondo que $\mathbb{S} = \mu W + V$ e que o vetor estado pode ser expresso como uma série de potências de μ, $|\tilde{\psi}(z)\rangle = |\tilde{\psi}_0\rangle + \mu|\tilde{\psi}_1\rangle + \mu^2|\tilde{\psi}_2\rangle + ..$, então

$$\begin{aligned} |\tilde{\psi}_0\rangle &= (z - V)^{-1}|\psi(0)\rangle \\ |\tilde{\psi}_n\rangle &= (z - V)^{-1}W|\tilde{\psi}_{n-1}\rangle \end{aligned}$$

Expansão supercrítica

- Fazendo uma transformação de Laplace sobre a solução formal da equação mestra, temos

$$|\tilde{\psi}(z)\rangle = (z - \mathbb{S})^{-1}|\psi(0)\rangle,$$

  com o estado estacionário dado por $|\psi(\infty)\rangle = lim_{z\to 0} z|\tilde{\psi}(z)\rangle$.

- Supondo que $\mathbb{S} = \mu W + V$ e que o vetor estado pode ser expresso como uma série de potências de μ, $|\tilde{\psi}(z)\rangle = |\tilde{\psi}_0\rangle + \mu|\tilde{\psi}_1\rangle + \mu^2|\tilde{\psi}_2\rangle + ..$, então

$$\begin{aligned} |\tilde{\psi}_0\rangle &= (z - V)^{-1}|\psi(0)\rangle \\ |\tilde{\psi}_n\rangle &= (z - V)^{-1}W|\tilde{\psi}_{n-1}\rangle \end{aligned}$$

Exemplo da expansão supercrítica para o PC

Lembrando que para o PC o operador $\mathbb{S}$ é dado por

$$\mathbb{S} = \sum_i [\frac{\lambda}{2}(\mathbb{A}_i^\dagger - \mathbb{A}_i\mathbb{A}_i^\dagger)(\mathbb{A}_{i-1}^\dagger\mathbb{A}_{i-1} + \mathbb{A}_{i+1}^\dagger\mathbb{A}_{i+1}) + (\mathbb{A}_i - \mathbb{A}_i^\dagger\mathbb{A}_i)],$$

então

$$W = \sum_i (\mathbb{A}_i - \mathbb{A}_i^\dagger\mathbb{A}_i)$$

e

$$V = \sum_i (\mathbb{A}_i^\dagger - \mathbb{A}_i\mathbb{A}_i^\dagger)(\mathbb{A}_{i-1}^\dagger\mathbb{A}_{i-1} + \mathbb{A}_{i+1}^\dagger\mathbb{A}_{i+1}),$$

sendo $\mu = 2/\lambda$.

Exemplo da expansão supercrítica para o PC

Ação dos operadores sobre uma configuração genérica $(\mathcal{C})$.

$$V(\mathcal{C}) = \sum_{i=1}^{q_1} (\mathcal{C}'_i) + 2\sum_{i=1}^{q_2} (\mathcal{C}'_i) - (q_1 + 2q_2)(\mathcal{C}),$$

$$W(\mathcal{C}) = \sum_{i=1}^{r} (\mathcal{C}''_i) - r(\mathcal{C}),$$

Dicionário

- q_1: número de sítios vazios com um vizinho ocupado.
- q_2: número de sítios vazios com dois vizinhos ocupados.
- r: número de sítios ocupados.
- $(\mathcal{C}'_i)$: configuração original com o sítio i ocupado.
- $(\mathcal{C}''_i)$: configuração original com o sítio i vazio.

Usando a identidade

$$(z-V)^{-1}(\mathcal{C}) = \frac{1}{z}\left[(\mathcal{C}) + (z-V)^{-1}V(\mathcal{C})\right].$$

temos

$$(z-V)^{-1}(\mathcal{C}) = z_{\tilde{q}}\left[(\mathcal{C}) + (z-V)^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{q_1}(\mathcal{C}_i') + 2\sum_{i=1}^{q_2}(\mathcal{C}_i')\right\}\right],$$

onde $z_{\tilde{q}} = 1/(z+\tilde{q})$

Cálculo de alguns termos

$$
\begin{aligned}
|\psi(0)\rangle &= |1\rangle \\
|\tilde{\psi}_0\rangle &= (z-V)^{-1}|1\rangle \\
&= \frac{1}{2}[|1\rangle + (z-V)^{-1}\{2|11\rangle\}] \\
&= \frac{1}{2}[|1\rangle + \{|11\rangle + (z-V)^{-1}(2|111\rangle)\}] \\
&= \frac{1}{2}[|1\rangle + |11\rangle + |111\rangle]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|\tilde{\phi}_1\rangle &= W|\tilde{\psi}_0\rangle \\
&= \frac{1}{2}\{[|0\rangle - |1\rangle] + 2[|1\rangle - |11\rangle] + 2|11\rangle + |101\rangle\} \\
&= \frac{1}{2}[|0\rangle + |1\rangle + |101\rangle] \\
|\tilde{\psi}_1\rangle &= (z-V)^{-1}|\tilde{\phi}_1\rangle \\
&= \frac{1}{2}|0\rangle + \frac{1}{4}|1\rangle + \frac{1}{4}|11\rangle + \frac{1}{8}|101\rangle
\end{aligned}
$$

Os demais termos são

$$
\begin{aligned}
|\tilde{\phi}_1\rangle &= \frac{1}{4}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle, \\
|\tilde{\psi}_2\rangle &= \frac{1}{4}|0\rangle + \frac{1}{4}|1\rangle \\
|\tilde{\phi}_2\rangle &= \frac{1}{4}|0\rangle \\
|\tilde{\psi}_3\rangle &= \frac{1}{4}|0\rangle.
\end{aligned}
$$

Calculando a probabilidade de sobrevivência

$$P_\infty = 1 - \lim_{z \to 0} z\langle 0|\tilde{\psi}(z)\rangle$$

temos

$$P_\infty = 1 - \frac{1}{2}\mu - \frac{1}{4}\mu^2 - \frac{1}{4}\mu^3 + ... = 1 - \sum_{i=1}^{25} b_i \mu^i$$

Análise da série

- Próximo ao ponto crítico temos que

$$P_\infty(\mu) \sim (\mu_c - \mu)^\beta$$

- Definindo a função $F(\mu) = d/d\mu ln P_\infty(\mu)$, temos

$$F(\mu) = \frac{\beta}{\mu_c - \mu} = \frac{\sum_{n=1}^{N} n b_n \mu^{n-1}}{\sum_{n=0}^{N} b_n \mu^n}.$$

- Definindo o aproximante de Padé

$$F(\mu) = \frac{P_L(\mu)}{Q_M(\mu)} = \frac{p_1 + p_2\mu + p_3\mu^2 + \ldots + p_L\mu^{L-1} + p_{L+1}\mu^L}{1 + q_2\mu + q_3\mu^2 + \ldots + q_M\mu^{M-1} + q_{M+1}\mu^M}$$

- Pólo do aproximante: ponto crítico; Resíduo associado ao pólo: expoente.

Análise da série

- Próximo ao ponto crítico temos que

$$P_\infty(\mu) \sim (\mu_c - \mu)^\beta$$

- Definindo a função $F(\mu) = d/d\mu ln P_\infty(\mu)$, temos

$$F(\mu) = \frac{\beta}{\mu_c - \mu} = \frac{\sum_{n=1}^{N} n b_n \mu^{n-1}}{\sum_{n=0}^{N} b_n \mu^n}.$$

- Definindo o aproximante de Padé

$$F(\mu) = \frac{P_L(\mu)}{Q_M(\mu)} = \frac{p_1 + p_2\mu + p_3\mu^2 + \ldots + p_L\mu^{L-1} + p_{L+1}\mu^L}{1 + q_2\mu + q_3\mu^2 + \ldots + q_M\mu^{M-1} + q_{M+1}\mu^M}$$

- Pólo do aproximante: ponto crítico; Resíduo associado ao pólo: expoente.

Análise da série

- Próximo ao ponto crítico temos que

$$P_\infty(\mu) \sim (\mu_c - \mu)^\beta$$

- Definindo a função $F(\mu) = d/d\mu ln P_\infty(\mu)$, temos

$$F(\mu) = \frac{\beta}{\mu_c - \mu} = \frac{\sum_{n=1}^{N} n b_n \mu^{n-1}}{\sum_{n=0}^{N} b_n \mu^n}.$$

- Definindo o aproximante de Padé

$$F(\mu) = \frac{P_L(\mu)}{Q_M(\mu)} = \frac{p_1 + p_2\mu + p_3\mu^2 + \ldots + p_L\mu^{L-1} + p_{L+1}\mu^L}{1 + q_2\mu + q_3\mu^2 + \ldots + q_M\mu^{M-1} + q_{M+1}\mu^M}$$

- Pólo do aproximante: ponto crítico; Resíduo associado ao pólo: expoente.

Análise da série

- Próximo ao ponto crítico temos que

$$P_\infty(\mu) \sim (\mu_c - \mu)^\beta$$

- Definindo a função $F(\mu) = d/d\mu ln P_\infty(\mu)$, temos

$$F(\mu) = \frac{\beta}{\mu_c - \mu} = \frac{\sum_{n=1}^{N} n b_n \mu^{n-1}}{\sum_{n=0}^{N} b_n \mu^n}.$$

- Definindo o aproximante de Padé

$$F(\mu) = \frac{P_L(\mu)}{Q_M(\mu)} = \frac{p_1 + p_2\mu + p_3\mu^2 + \ldots + p_L\mu^{L-1} + p_{L+1}\mu^L}{1 + q_2\mu + q_3\mu^2 + \ldots + q_M\mu^{M-1} + q_{M+1}\mu^M}$$

- Pólo do aproximante: ponto crítico; Resíduo associado ao pólo: expoente.

Resultados para o PC

[L,M]	μ_c	β
[8,9]	0.6064568	0.2764
[9,9]	0.6064564	0.2764
[9,10]	0.6064572	0.2764
[10,9]	0.6064562	0.2763
[10,10]	0.6064565	0.2763
[10,11]	0.6064556	0.2765
[11,10]	0.6064562	0.2763

$$\lambda_c = \frac{2}{\mu_c} = 3.297848$$

Exemplo da expansão supercrítica para o PCCP

- Assim é a ação do operador $(s-V)^{-1}$ sobre uma configuração arbitrária, contando com p_1 sítios com um par de primeiros vizinhos ocupados ou p_2 sítios com dois pares de primeiros vizinhos ocupados,

$$(s-V)^{-1}(\mathcal{C}) = s_q \left\{ (\mathcal{C}) + (s-V)^{-1} \left[\sum_{i=1}^{p_1} (\mathcal{C}_i'') + 2 \sum_{j=1}^{p_2} (\mathcal{C}_j'') \right] \right\},$$

  onde $s_q \equiv 1/(s+q)$ e $q = p_1 + 2p_2$.
- Quando a configuração não possui pares de sítios ocupados,

$$(s-V)^{-1}(\mathcal{P}) = \frac{1}{s}(\mathcal{P}).$$

- Aparecimento de divergência para alguma ordem na expansão.

Modelo modificado

1. Criação

$$\bullet\bullet\circ \xrightarrow{\lambda_p n_p/2} \bullet\bullet\bullet$$

   e

$$\bullet\circ \xrightarrow{\lambda_s n_s/2} \bullet\bullet,$$

   onde n_p é o número de pares de primeiros vizinhos ocupados e n_s é simplesmente o número de primeiros vizinhos ocupados.

2. Aniquilação

$$\bullet \xrightarrow{1} \circ$$

Com essas regras, o operador de evolução pode ser escrito como $S = \lambda_p S_p + \lambda_s S_s + W_0$, ou

$$S = V + \mu W_0,$$

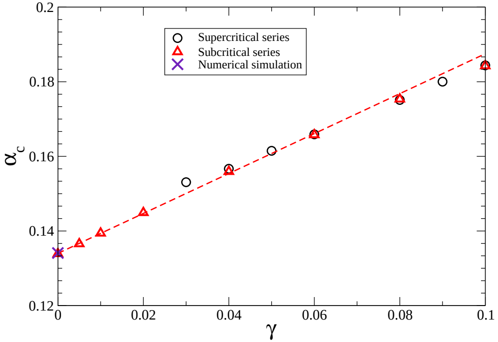
onde

$$V = S_p + \gamma S_s,$$

$\mu = 2/\lambda_p$ e $\gamma = \lambda_s/\lambda_p$.
Logo, quando não há pares de primeiros vizinhos ocupados,

$$(s - V)^{-1}(\mathcal{P}) = \frac{1}{s + \gamma b}\left\{(\mathcal{P}) + \sum_j (\mathcal{P}^j)\right\},$$

onde b é um número inteiro e $(\mathcal{P}^j)$ é a configuração originada de $(\mathcal{P})$ por uma criação simples.



1

[1]W.G.Dantas, C.E.Fiore e M.J. de Oliveira, JPA, **40**, 4305 (2007)

Sumário

- J. Marro and R. Dickman, *Nonequilibrium Phase Transitions in Lattice Models*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- H. Hinrichsen, "Nonequilibrium critical phenomena and phase transitions into absorbing states", Adv. Phys. **48**, 815 (2000).